



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

PROBLÉM TRHLINY V BLÍZKOSTI BIMATERIÁLOVÉ ROZHRANÍ

PROBLEM OF THE CRACK TERMINATING AT THE BIMATERIAL INTERFACE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. MIROSLAV SVOBODA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Miroslav Svoboda

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Problém trhliny v blízkosti bimateriálové rozhraní

v anglickém jazyce:

Problem of the crack terminating at the bimaterial interface

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Součástí rozvoje moderních technologií je stále širší užití moderních materiálů, jejichž podstata spočívá ve využívání rozdílných, např. mechanických, vlastností složek, z nichž jsou tyto materiály komponovány, ať již se jedná o kompozity nebo např. ochranné vrstvy homogenního substrátu. Rozdílné mechanické vlastnosti jednotlivých složek těchto materiálů však mohou vést k jejich porušování lomem. Cílem uchazeče je aplikovat teorii psí-integrálu a tzv. přímé metody k určení zobecněného faktoru intenzity napětí pro trhlinu v blízkosti bimateriálového rozhraní dvou ortotropních nebo izotropních materiálů.

Cíle diplomové práce:

1. Výpočet exponentu singularity v případě trhliny nakloněné pod libovolným úhlem vzhledem k bimateriálovému rozhraní.
2. Určení koeficientu intenzity napětí analyticko-numerickým přístupem pomocí MKP.

Seznam odborné literatury:

Broberg, K. B., Cracks and Fracture, Academic Press, 1999.

Ševeček, O. Solution of genral stress concetrators in anisotropic media by combination of FEM and the complex potential theory, disertační práce, 2009

Profant, T., Interakce mikrotrhlin s částicemi druhé fáze, disertační práce, 2003

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 29.10.2010

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt:

Cílem práce je seznámení se s problematikou lineární lomové mechaniky, popisem napětí a deformací v okolí vrcholu trhliny na rozhraní dvou ortotropních materiálů pomocí teorie rovinné pružnosti. První část je věnována teoretickým základům lomové mechaniky. Druhá část se zabývá výpočtem exponentu singularity v případě trhliny nakloněné pod libovolným úhlem vzhledem k bimateriálovému rozhraní. Dále se určuje koeficient intenzity napětí analyticko-numerickým přístupem pomocí MKP. Poslední, třetí část, je zaměřena na testování algoritmů na konkrétních konfiguracích trhliny vůči bimateriálovému rozhraní. V závěru se vyhodnocují numerické výsledky, vlivy mechanických vlastností materiálů a vlivy úhlu sklonu trhliny vůči rozhraní.

Abstract:

The objective of this diploma thesis is the stress-strain analysis of the crack terminating at the orthotropic bi-material interface suggested as the plane problem of the linear fracture mechanics. The first part is engaged in basic relations of the linear fracture mechanics. The second part is focused on the singularity exponent evaluation for the crack impinging and generally inclined with respect to the bi-material interface. It follows the determination of the generalized stress intensity factors applying the analytical-numerical approach represented by the finite element analysis. The last part of this work is focused on the testing of algorithms applied to the specific crack and bi-material interface configurations. A conclusion discusses the influence of the bi-material mechanical properties and the angel of the crack inclination to the obtained numerical results.

Klíčová slova:

Lineární lomová mechanika, trhlina, exponent singularity, bimateriálové rozhraní, ortotropní materiál, kompozit, zobecněný faktor intenzity napětí

Keywords:

Linear fracture mechanics, crack, stress singularity exponent, bi-material interface, orthotropic material, composite, generalized stress intensity factor

Bibliografická citace:

SVOBODA, M. *Problém trhliny v blízkosti bimateriálového rozhraní*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 58 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že předložená diplomová práce je mojí původní prací, kterou jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího mé diplomové práce a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 25. května 2012

Bc. Miroslav Svoboda

Poděkování:

Rád bych poděkoval vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Tomášovi Profantovi, Ph.D. za jeho ochotu, vstřícnost a cenný čas, který mi věnoval po celou dobu řešení této práce. Zároveň mu děkuji za cenné rady, které byly pro mě velkým přínosem. Dále bych rád poděkoval své rodině a svým nejbližším za podporu při tvorbě této práce.

Obsah

1. Úvod.....	14
2. Systém podstatných veličin.....	15
2.1. <i>Aplikace systému podstatných veličin</i>	<i>15</i>
3. Základní pojmy lomové mechaniky.....	18
3.1. <i>Griffithova teorie šíření trhlín</i>	<i>18</i>
3.2. <i>Stabilita šíření trhliny</i>	<i>20</i>
3.3. <i>Plastická oblast na čele trhliny</i>	<i>21</i>
3.4. <i>Módy zatěžování</i>	<i>22</i>
3.5. <i>Faktor intenzity napětí</i>	<i>22</i>
4. Kompozitní materiály	23
4.1. <i>Mechanické charakteristiky kompozitních materiálů</i>	<i>24</i>
4.2. <i>Podélný modul pružnosti a podélná pevnost.....</i>	<i>24</i>
4.3. <i>Příčný modul pružnosti a příčná pevnost</i>	<i>26</i>
4.4. <i>Modul pružnosti ve smyku a Poissonovo číslo</i>	<i>27</i>
4.5. <i>Konstitutivní vztahy</i>	<i>28</i>
5. Řešení problému	29
5.1. <i>Exponent singularity</i>	<i>30</i>
5.2. <i>Zobecněný faktor intenzity napětí.....</i>	<i>34</i>
6. Popis výpočtových programů	39
7. Diskuse.....	41
7.1. <i>Výpočet exponentu singularity</i>	<i>41</i>
7.2. <i>Výpočet zobecněného faktoru intenzity napětí.....</i>	<i>43</i>
7.3. <i>Deformační a napěťové pole v okolí čela trhliny.....</i>	<i>47</i>
7.4. <i>Numerické vyhodnocení.....</i>	<i>50</i>
8. Závěr.....	52
9. Literatura	53
10. Seznam zkratk a symbolů	55
11. Dodatky	56

1. Úvod

Lomová mechanika je jedna z nejmladších vědních disciplín v oblasti mechaniky těles a materiálového inženýrství, která se začala rozvíjet v první polovině dvacátého století. Jejím cílem je studie mezních stavů součástí s trhlinou, která negativně ovlivňuje vlastnosti materiálů. Ovšem tato disciplína se velice rozvíjí a nabírá na významnosti. Snahou je předcházet či zabránit rozpadu tělesa vlivem trhliny.

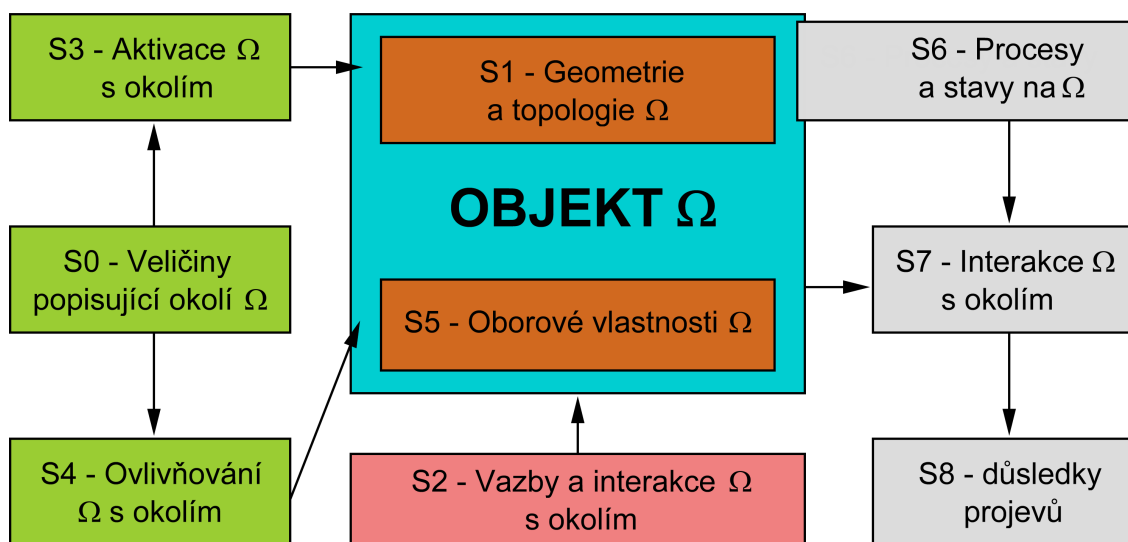
Součástí rozvoje moderních technologií je stále širší užití moderních materiálů, jejichž podstata spočívá ve využívání rozdílných, např. mechanických vlastností složek, z nichž jsou tyto materiály komponovány. Ať již se jedná o kompozity nebo např. ortotropní materiály. Příkladem ortotropního materiálu je dvousložkový kompozit s dlouhými vyztužujícími vlákny, v případě rovinné úlohy se jedná o tzv. laminu. Z technologických i konstrukčních důvodů lze tyto kompozity dále navzájem kombinovat a získat materiály optimálních vlastností. Můžeme tak vytvářet konstrukce vysoké kvality, pohybující se mnohdy na hranici únosnosti, které stále vyhovují požadované bezpečnosti.

Jak z mikroskopického, tak makroskopického hlediska, chování ortotropních materiálů závisí na vlastnostech rozhraní (zrn, ochranné vrstvy a substrátu, atd.), přičemž jedním z důležitých mechanismů jeho porušování je vlivem šířící se trhliny.

Cílem práce je vyjádřit charakteristiky singulárního pole napětí v okolí čela trhliny, které se nachází na rozhraní dvou ortotropních materiálů. Úloha se bude řešit jako rovinný problém lineární elastické lomové mechaniky. Trhlina je libovolně orientována vzhledem k rozhraní. Práce je zaměřena na analytický popis napětí a deformace v okolí vrcholu trhliny na základě znalosti exponentu singularity napětí a hodnot zobecněného faktoru intenzity napětí. Všechny veličiny budou vyjádřeny kombinací analytických i numerických prostředků založených na konečnoprvkových modelech a teorii komplexních potenciálů.

2. Systém podstatných veličin

Každý vynálezce či vědecký pracovník se při své práci setkává s problémy, které musí vyřešit, aby se dopracoval ke zdárnému konci. Při těchto nestandardních situacích musí zvážit, co je pro řešení problému důležité a co může zanedbat. Vytváří tak systém podstatných a problémově orientovaných veličin na objektu (entitě), tzn. vytváří systémové myšlení. Je to myšlení cílevědomé, tvořivé a komplexní. Systém podstatných veličin si lze představit jako abstraktní objekt Ω , který má svou strukturu, množinu prvků na určité rozlišovací úrovni a množinu vazeb mezi těmito prvky (umožňující interakci mezi prvky). Vytváříme tak soustavu podmnožin Σ_i , které lze považovat za dílčí systémové veličiny $\Sigma(\Omega)_i$. Každý objekt je charakterizován svým tvarem, topologií a vazbami s okolím. Pomocí vazeb lze aktivovat objekt a tím na něm vyvolat procesy a změnu stavu. Objekt se do svého okolí určitým způsobem projevuje, což má určité důsledky. Všechny uvedené skutečnosti lze popsat díky systému podstatných veličin [5].



Obr. 1: Podmnožiny systému podstatných veličin

2.1. Aplikace systému podstatných veličin

S přibývajícími materiály se kladou požadavky na spolehlivost, životnost a především na bezpečnost. Ať už se jedná o konstrukci či zařízení. Významnou roli v těchto aspektech hraje i lomová mechanika. Mnohé definice uvádějí, že lom (trhlina) je oblast v tělese, v níž nastalo porušení soudržnosti. Je to proces nevratný, nežádoucí a končí rozpadem tělesa na dvě nebo více součástí. Bohužel s touto skutečností je spojeno nemálo nešťastných událostí, kde docházelo i ke ztrátám na životech. Dnes jsme již schopni popsat chování nebo zabránit šíření trhliny v mnoha materiálech. Ovšem u moderních kompozitních materiálů, které mají rozdílné mechanické vlastnosti jednotlivých složek, je popis chování trhliny komplikovanější. Cílem této práce je určení napětového pole trhliny kolmé na bimateriálové rozhraní dvou dokonale spojených ortotropních materiálů. Konkrétně se jedná o určení exponentu singularity p_k a zobecněného faktoru součinitele intenzity napětí H . Nyní si definujeme devět skupin podstatných veličin.

Podmnožiny systému podstatných veličin:***S0 – Veličiny popisující okolí entity:***

Ortotropní materiály se vyznačují třemi navzájem kolmými rovinami symetrie materiálových vlastností. V případě rovinné úlohy, třetí osu zanedbáváme. Jedná se o speciální případ, kdy zvyšujeme symetrii tělesa z pohledu zatěžování. Pro jejich popis slouží Youngovy moduly, moduly ve smyku a Poissonova čísla v ose X a Y . Hodnoty v jednotlivých směrech jsou různé. Představitelem uvedených materiálů jsou kompozity s dlouhými vyztužujícími vlákny v jednom směru. Při tahovém zatížení, ve směru vláken, jsou hodnoty napětí vyšší než při kolmém tahovém zatížení na vlákna.

S1 – Geometrie a topologie entity:

Konfigurace se skládá ze dvou ortotropních materiálů, které jsou navzájem dokonale spojeny. Trhlina se nachází v jednom z materiálů (rozděluje je na dvě oblasti) a je kolmá na rozhraní. Počátek souřadného systému definujeme na čele trhliny, které se nachází na rozhraní. Osa Y je ve směru šíření trhliny. Jelikož uvažujeme rovinnou úlohu, použijeme polárních souřadnic. Uvedenou výchozí topologii budeme následně modifikovat tím způsobem, že trhlínu natočíme vůči rozhraní o stanovený úhel v rozsahu 0 až 180° . Definovaný souřadný systém se ovšem měnit nebude.

S2 – Vazby a interakce entity s okolím:

Jedná se o vzorek, který je zatěžován tahovým zatížením ve směru rozhraní. V případě reálného použití můžeme uvést tlakovou nádobu vyrobenou z výše uvedeného kompozitního materiálu nebo lopatku turbíny s povrchovou ochrannou vrstvou. Praktické využití je velké.

S3 – Aktivace entity s okolím:

Za jistých okolností se trhlina šíří samovolně bez změny vnějšího zatížení. Při zvětšování lomové plochy dochází k uvolnění energie napjatosti. Pro posouzení stability trhliny nám slouží rovnice energetické bilance. Odečteme-li energii potřebnou pro zvětšení délky trhliny W_p od poklesu energie napjatosti W_e , získáme tak energii vnějšího zatížení W_z , potřebnou pro posouzení stability. Je-li W_z záporné nebo rovno nule, dochází k šíření trhliny. Tomuto stavu se snažíme vyvarovat a předejít. Dáváme přednost případu kladné energie W_z , kdy k šíření trhliny je potřeba dodávat energii vnějšího zatížení, tzn. je nutné zvýšit vnější zatížení.

S4 – Ovlivňování entity s okolím:

Faktor intenzity napětí je nedílnou součástí lomové mechaniky pro posouzení pevnosti tělesa s trhlínou. V lineárně pružném materiálu určuje nejen napjatost a deformaci v malém okolí trhliny, ale i tvar a otevření. Je ovlivněn plastickou oblastí na čele trhliny, kde dochází k singularitě. Vyvarovat se této skutečnosti lze kvalitnějším materiálem či povrchem nebo změnou geometrie. Dále je faktor ovlivňován způsobem zatěžování. Rozeznáváme tři typy, tzv. módy, zatěžování (viz níže). Nejnebezpečnější, z pohledu posuzování bezpečnosti, je tahový Mód I, kdy trhlina je rozevírána. Zobecněný faktor intenzity napětí v sobě kombinuje všechny tři módy a číslujeme je arabskými číslicemi tak, že dominantní zatížení má nejvyšší

číslo indexu. V neposlední řadě je ovlivňující veličinou exponent singularity, který je závislý především na materiálových vlastnostech a způsobu zatěžování trhliny.

S5 – Oborové vlastnosti (struktury) entity:

Zobecněný faktor intenzity napětí H_k počítáme pomocí tzv. psi-integrálu, který vychází z Bettiho recipročního teorému. Ten pracuje se skutečným a pomocným řešením, přičemž pomocná pole napětí a posuvů vyhovují stejným lokálním okrajovým podmínkám a konstitutivním vztahům jako skutečná pole napětí a posuvů. Pomocné řešení je více singulární než řešení popisující skutečný stav v okolí kořene trhliny. Proto je integrál při integraci podél nekonečně malé cesty okolo kořene trhliny konečný. Výhodou tohoto přístupu je nezávislost integrační cesty obklopující kořen trhliny. Další způsob určení faktoru H_k je pomocí tzv. přímé metody.

Exponent singularity p_k získáme z teorie rovinné anizotropní pružnosti, známé jako *LES formalismus*. Tato teorie vychází z vlastností funkcí komplexní proměnné, kde je (mimo jiné) zjednodušený popis elastických vlastností materiálu. Předpokládáme statický a izotermický stav.

S6 – Procesy a stavy:

Vlivem zatěžování dochází k posuvům lomových ploch. Podle jejich směru jsme schopni určit, o jaký typ namáhání se jedná. Jsou-li posuvy na lomových plochách, kolmých na trhlínu nesouhlasné, jedná se o tahová zatížení (trhlína je rozevírána). V opačném případě jde o smyk v rovině (stále se jedná o rovinnou úlohu). Pomocí zobecněného faktoru intenzity napětí H_k jsme schopni určit pole napětí v blízkém okolí čela trhliny na bimateriálovém rozhraní. Na základě těchto znalostí pak můžeme určit, jak se trhlína bude následně chovat. Za jakých podmínek se bude šířit, zda bude pokračovat ve druhém materiálu nebo po rozhraní naší konfigurace atd.

S7 – Interakce entity s okolím (projev):

V důsledku vznikající singularity vzniká vysoká koncentrace napětí na velmi malém místě, což lze chápat jako oslabení materiálu. Naší snahou je předejít či omezit těmito skutečnostem, které je nutné posuzovat individuálně pro konkrétní případy. Bohužel i přes veškerou snahu nejsme schopni v některých případech určit přesný směr následného růstu trhliny.

S8 – Důsledky projevů:

V konečné fázi dochází k rozpadu součásti na dvě či více částí, tzn. poškození součásti. Tento jev má většinou řetězovou reakci, kdy dochází k poškození dalších dílů stroje, úniku technických látek či jedů, dopravním nehodám apod. V případě ochranné vrstvy lopatky přestává být vrstva účinná, což má za následek rozrušování materiálu pod vrstvou a poškození samotné lopatky.

Uvedené podmnožiny systému podstatných veličin vytváří představu o problematice popsané v této práci a upozorňují na skutečnosti, které při řešení nelze zanedbat.

3. Základní pojmy lomové mechaniky

V praxi se často materiály porušují při menším nominálním napětí, než je mez kluzu. Příčinou jsou defekty typu trhlina, které vzniknou při výrobě nebo provozu. Jak uvádí [8]: Trhlina je oblast v tělese, v níž nastalo porušení soudržnosti usměrněným šířením z jednoho nukleačního místa. Jedná se o proces, který následkem zatěžování končí rozpadem tělesa na dvě nebo více částí. Jde o nevratný, nežádoucí proces. Vědní obor zabývající se šířením trhlín v materiálu se nazývá lomová mechanika. Trhlinu lze chápat jako vrub s velmi ostrým kořenem, kde na čele vzniká vysoká koncentrace napětí a to již při nízkém zatěžování.

3.1. Griffithova teorie šíření trhlín

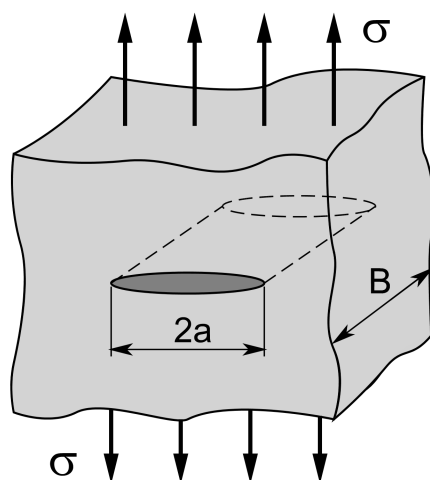
Na počátcích lomové mechaniky stál anglický inženýr *Alan Arnold Griffith*, který v roce 1920 publikoval teorii založenou na energetických principech popisující chování trhliny v křehkých materiálech. Vycházel z celkové potenciální energie tělesa s trhlinou Π , která představuje součet energie napjatosti tělesa a potenciální energie vnějších sil. Energii Π můžeme rozepsat do tvaru

$$\Pi = \Pi_0 + W - W_0 = \Pi_0 - (W_0 - W), \quad (1)$$

kde Π_0 je celková potenciální energie tělesa bez trhliny, W_0 je energie napjatosti tělesa bez trhliny, W je energie napjatosti tělesa s trhlinou. Rozdíl v závorce, uvedený ve vztahu (1), udává změnu energie v důsledku vzniku trhliny. V případě nekonečné tažené stěny s průchozí trhlinou (viz Obr. 2) vyjádříme tuto změnu ve tvaru

$$(W_0 - W) = W_T = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a^2 \cdot B}{E}, \quad (2)$$

kde a , B jsou rozměry trhliny, σ je tahové napětí a E je Youngův modul pružnosti.



Obr. 2: Tažená nekonečná stěna s průchozí trhlinou

Griffith uvažoval, že pro ideálně křehký materiál je disipační energie spotřebovávána pouze na vznik nových ploch. Definoval tak podmínku nestability trhliny ve tvaru

$$-\frac{d\Pi}{dS} = \frac{dW_T}{dS} = \frac{d\Gamma}{dS} \quad \text{kde} \quad \Gamma = \gamma \cdot 4 \cdot a \cdot B \quad (3)$$

Člen dS značí změnu lomové plochy trhliny, a $d\Gamma$ změna disipační energie. Energie Γ je dána součinem dvojnásobku průmětu plochy trhliny S ($S = 2 \cdot a \cdot B$) a měrné povrchové energie materiálu γ . Vzájemným dosazením výše uvedených vztahů získáme v konečné fázi rovnici pro lomové napětí σ_f

$$\sigma = \sigma_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot \gamma}{\pi \cdot a}}. \quad (4)$$

Z výše popsané teorie je patrné, že uvolňovaná celková potenciální energie lineárně závisí na délce trhliny a naopak změna disipační energie na délce nezávisí.

Griffithova teorie se stala základním kamenem lomové mechaniky. Z jeho poznatků jsme schopni stanovit nejen kritickou délku trhliny, ale také její hnací sílu. Výchozí rovnicí je podmínka nestability (3), kde změna disipační energie (podíl $d\Gamma/dS$) charakterizuje odpor tělesa R proti růstu trhliny, tj. energie nutné k vytvoření lomové plochy. Potřebná energie je dodávána pomocí vnějších sil nebo částí energie napjatosti uvolněné při růstu trhliny. Hnací silou trhliny G je označována změna celkové potenciální energie vyjádřené jako

$$G = -\frac{d\Pi}{dS} = \frac{dW_T}{dS} = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E}. \quad (5)$$

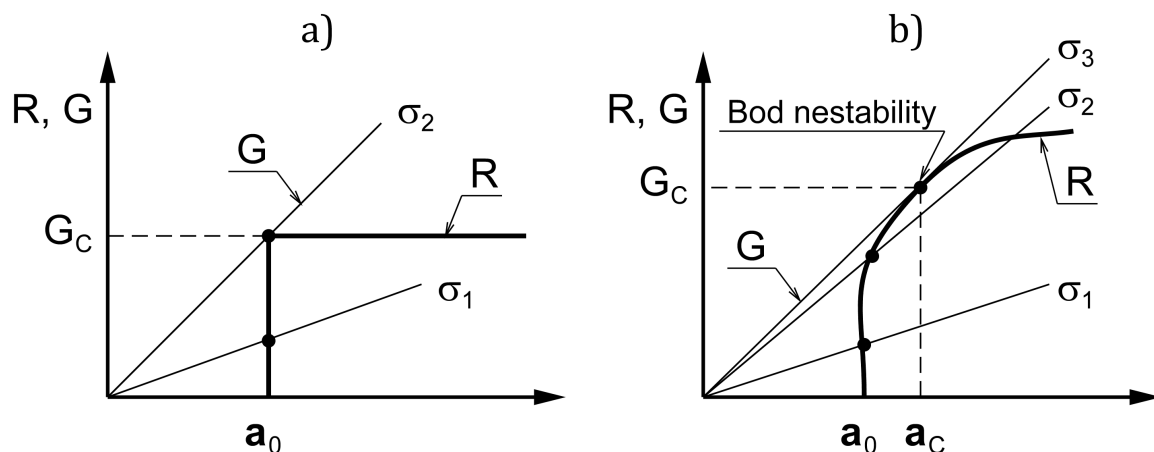
V našem případě nekonečně tažené stěny je hnací síla G lineárně závislá na její velikosti a můžeme psát obecnou podmínku ztráty stability trhliny ve tvaru

$$\begin{aligned} G &= R, \\ -\frac{d\Pi}{dS} &= \frac{d\Gamma}{dS}, \end{aligned} \quad (6)$$

kde R je výše uvedený odpor tělesa proti růstu trhliny. Dosáhne-li hnací síla G své kritické hodnoty, mluvíme o houževnatosti materiálu G_c . Později bylo zjištěno, že kritické napětí pro danou trhlínu závisí pouze na součinu kritické hnací síly a Youngova modulu ($G_c \cdot E$). Druhá odmocnina tohoto součinu je dnes známá a běžně používaná jako lomová houževnatost K_{Ic} [2].

3.2. Stabilita šíření trhliny

Výše uvedené veličiny G a R rozhodují o dalším chování trhliny. Je-li splněna podmínka (6), trhlina bude růst. O stabilitě růstu rozhoduje to, jak se bude měnit hnací síla G a odpor R v závislosti na změně velikosti trhliny a . Závislost vyjadřujeme pomocí tzv. R-křivek. Na obrázku 3 jsou uvedeny dvě charakteristiky pro rozdílné materiálové vlastnosti.



Obr. 3: R-křivky; a) stav rovinné deformace; b) stav rovinné napjatosti.

První případ (Obr. 3a) odpovídá ideálně křehkému materiálu, tj. odpor proti růstu trhliny je konstantní, nezávislý na jejím nárůstu. Na čele trhliny vzniká stav rovinné deformace. Pokud zatěžíme naši nekonečnou stěnu na hladině odpovídající σ_1 , trhlina zůstává stabilní. Naopak při zatěžování napětím σ_2 se trhlina šíří nestabilně. Druhý případ (Obr. 3b) je typický pro materiály s větší plastickou oblastí na čele trhliny, a pro případ rovinné napjatosti. Po dosažení určité prahové hodnoty dojde k růstu trhliny. V případě zatěžování σ_1 a σ_2 dojde k malému, ale stabilnímu nárůstu trhliny. Platí nerovnost

$$\frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da}. \quad (7)$$

Pokud zatěžíme napětím σ_3 , kdy závislost hnací síly trhliny G je tečnou křivky odporu R , pak trhlina roste nestabilně. Tomuto stavu se snažíme předejít. Zde platí nerovnost

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da}. \quad (8)$$

O stabilním šíření trhliny je pojednáno i v [2, 11].

3.3. Plastická oblast na čele trhliny

Jak již bylo uvedeno, Griffith pracoval s domněnkou, že disipační energie se spotřebuje pouze na vznik nových lomových ploch. Bohužel u reálných materiálů neplatí předpoklad lineárně elastické odezvy materiálu v důsledku vzniku plastické oblasti před čelem trhliny. Její velikost výrazně ovlivňuje výsledné napětíové pole v blízkosti čela trhliny. Na Griffithovu práci navázal Američan *George Rankone Irwin* (1956), který rozdělil celkovou energii nutnou k porušení vzorku do dvou částí (elastická deformační energie a plastická disipační energie). Modifikovaný tvar rovnice pro lomové napětí (4) podle Irwina je ve tvaru

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot \gamma_{ef}}{\pi \cdot a}} \quad \text{kde} \quad \gamma_{ef} = \gamma + \gamma_{pl} \quad (9)$$

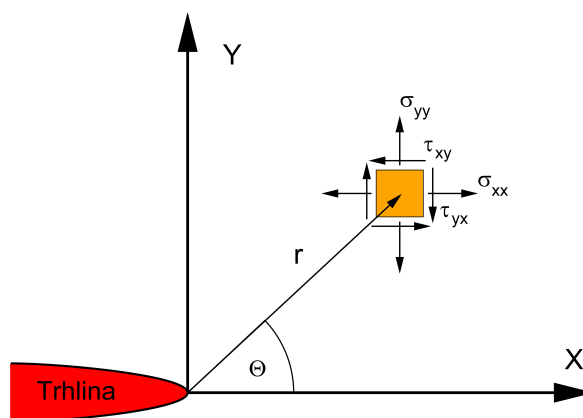
V uvedeném vztahu (9) je efektivní povrchová energie materiálu γ_{ef} součtem měrné povrchové energie γ a plastické disipační energie γ_{pl} . Ovšem známější a používanější je vztah pro popis napětíového pole v blízkém okolí čela trhliny. V případě zavedení polárního souřadnicového systému s počátkem na čele koncentrátoru se může pro napětí psát

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{\sqrt{2 \cdot \pi}} r^{\delta-1} F_{ijk}(\theta), \quad (10)$$

kde r a θ jsou polární souřadnice (viz Obr. 4), číslo $\delta-1$ je tzv. exponent singularity napětí a funkce F_{ijk} je bezrozměrná funkce (viz [8]). H_k je tzv. zobecněný faktor intenzity napětí. Vztah (10) může být zobecněn do tvaru nekonečné mocninné řady, tzv. Williamsova rozvoje

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{n}{2} \right) \cdot r^{\frac{n}{2}-1} f_{ij}(n, \varphi), \quad (11)$$

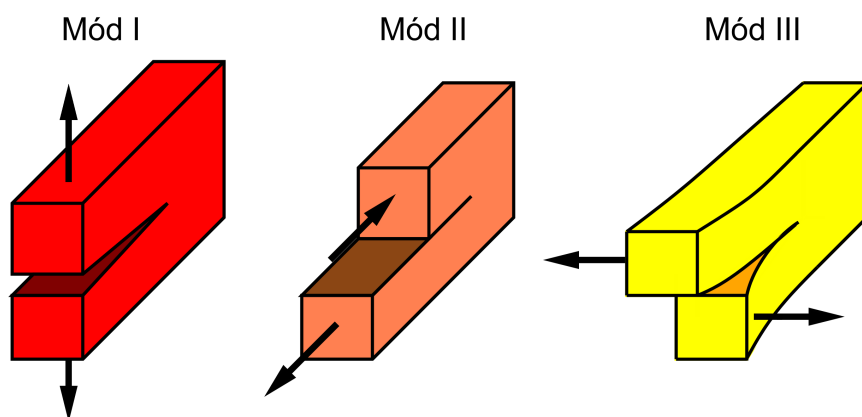
kde stejně jako v (10), σ_{ij} jsou složky tenzoru napětí, r a θ jsou polární souřadnice [2].



Obr. 4: Polární souřadnicový systém elementárního prvku v blízkém okolí čela trhliny.

3.4. Módy zatěžování

Podle typu zatěžování tělesa s trhlinou jsme schopni stanovit způsob namáhání trhliny. Zavádíme tak tři základní zatěžovací módy. Mód I je v případě, kdy je trhlina rozevírána např. příčným tahovým napětím. Je považován za nejnebezpečnější, jelikož šíření trhliny je urychlováno. Představitelem smyku v rovině je Múd II. Lomové plochy se posouvají v rovině kolmé na čelo trhliny. Poslední mód, Múd III, je chápán jako smyk v prostoru. Posuvy vznikají v rovině rovnoběžné s rovinou stříhu a čelem tělesa (viz Obr. 5). Způsob zatížení trhliny odpovídá uvedeným zatěžovacím módům či jejich superpozicím [1].



Obr. 5: Typy zatěžovacích módů trhliny.

3.5. Faktor intenzity napětí

Faktor intenzity napětí je podstatnou veličinou pro lomovou mechaniku. Jak je uvedeno v [8]: Dnes již existuje mnoho exaktních výrazů, eventuálně grafických průběhů pro různá tělesa, trhliny i zatížení. V lineárně pružném materiálu určují nejen napjatost a deformaci v malém okolí trhliny, ale i její tvar a otevření. Dále pak velikost plastické oblasti a uvolněnou energii v důsledku šíření trhliny. V případě homogenního izotropního prostředí mluvíme o faktoru intenzity napětí K_i , kde index i odpovídá výše popsaným typům nespojitosti I, II a III. Obecný vztah pro mód I je ve tvaru

$$K_I = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\Phi_0} \cdot Y(a, B, W, \dots) \quad (12)$$

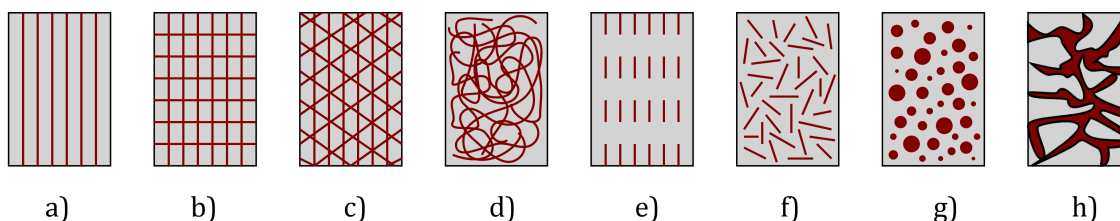
kde σ je smluvní napětí, Y je tvarová (korekční) funkce a Φ_0 je funkce zohledňující tvar trhliny (pro průchozí trhlinu je $\Phi_0 \leq 1$). Pokud nastane obecná nespojitost trhliny, pak pole napětí či deformace získáme superpozicí. Mezní hodnota K_{IC} určuje lomovou houževnatost materiálu. V případě anizotropního materiálu hovoříme o tzv. zobecněném faktoru intenzity napětí H_k , který v sobě kombinuje všechny módy zatěžování. Místo římských indexů píšeme arabské číslice, které řadíme sestupně tak, že dominantní zatížení (tah, smyk v rovině nebo smyk v prostoru) má nejvyšší číslo indexu [2].

4. Kompozitní materiály

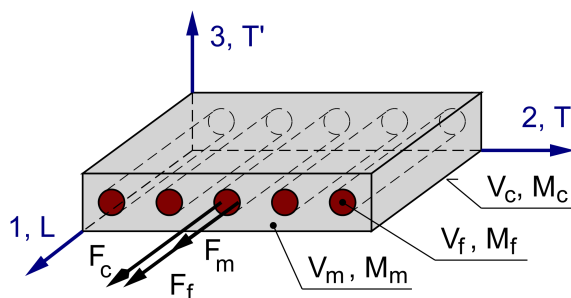
Vlastnosti ortotropního materiálu jsou přirovnávány k vlastnostem kompozitu, které v oblasti inženýrského konstruování otevírají nové možnosti. Oproti klasickým materiálům se vyznačují především nízkou hustotou, větší pevností, lomovou houževnatostí, vyšší odolností vůči chemickým a povětrnostním vlivům a mnohdy i snadnější technologií výroby. Jak uvádí [14], kompozit je složený materiál, skládající se ze dvou či více složek, z nichž každá plní jinou specifickou funkci a má jiné mechanické vlastnosti, většinou značně odlišné. Vytváříme tak struktury, které jsou vysoce pevné v místech, kde je to vyžadováno. Snahou je stanovit mechanické charakteristiky na základě známých mechanických charakteristik jednotlivých složek, při definované struktuře a objemovém složení. Složky kompozitu rozdělujeme do dvou základních skupin:

- **Nosná část (vlákna, výztuž):** vytváří pevnostní charakteristiky kompozitu. Mohou být kovové (W, Fe, Cr, Ti, atd.), anorganické (keramika, sklo, uhlík, atd.) nebo organické (polymer, např. Nylon). Podle jejího geometrického tvaru klasifikujeme kompozity jako vláknové, částicové či skeletové (viz Obr. 6).
- **Matrice:** spojuje výztuž v kompaktní celek a vytváří tak geometrii tělesa. Dále zprostředkovává zatížení vláken v místech vnějšího zatížení, v místě přerušení vláken či mezi vlákny. Opět může být kovová (Al, Fe, Mg, Co, atd.), anorganická (keramika, sklo, uhlík) nebo organická (pryskyřice, epoxidy, polyestery, apod.). Důležitým mechanickým požadavkem matrice je dobrá adheze k nosné části a dobrá mezní tažnost.

Výroba kompozitu je závislá především na materiálu matrice a tvaru vlákna. Např. máme-li organickou matici a dlouhá vlákna, lze použít technologie jako je vakuové zpracování v autoklávu, lisování přípravku či navíjení. Ovšem nejjednodušší výrobní technologií je ruční ukládání, kde rozeznáváme dvě techniky. Je to tzv. technika mokrého ukládání wet lay-up, kdy je výztuž, v podobě tkaných rohoží, impregnována kapalnou maticí přímo ve formě. Nevýhodou je nehomogenita struktury. Druhou metodou je technika předimpregnace pre-preg, kde vlákno je již impregnováno u dodavatele. Ke konečnému vytvrzení výsledného kompozitu dochází za zvýšené teploty v autoklávu. Použitá výztuž může být ve formě dlouhých nebo krátkých (náhodně uspořádaných) vláken, či v podobě tkaných rohoží. Způsobů výroby kompozitu je celá řada, ovšem cílem této kapitoly je uvést potřebné konstitutivní vztahy, nutné pro popis materiálových mechanických charakteristik.



Obr. 6: Typy vláknových kompozitů: a) Jednosměrná dlouhá vlákna; b) Dvousměrná dlouhá vlákna; c) Vícesměrná dlouhá vlákna; d) Náhodná dlouhá vlákna; e) Jednosměrná krátká vlákna; f) Náhodná krátká vlákna; g) Částicový KM; h) Skeletový KM;



Obr. 7: Souřadnicové systémy dlouhováknového jednosměrného kompozitu.

4.1. Mechanické charakteristiky kompozitních materiálů

Materiálové charakteristiky závisí především na charakteristikách jednotlivých složek, geometrickém uspořádání a na kvalitě mezisložkového rozhraní. Zaměříme se na dlouhováknové jednosměrné kompozity, kdy uvažujeme ideální výpočtový model, tzn. kompozitní materiál (dále jen KM) bez přítomnosti poruch. Abychom mohli posoudit pevnostní charakteristiky KM, je nutné si nejprve stanovit potřebná směšovací pravidla (viz níže).

Na obrázku 7 je uveden jednovrstvý geometrický výpočtový model, kde jsou zobrazeny dva typy souřadnic. Hlavní ortotropní směry jsou označeny čísly 1, 2 a 3. V tomto případě korespondují s hlavními materiálovými směry L, T a T', přičemž Longitudiální (podélný) směr L je souhlasný se směrem vláken, osa T je transversální (příčný) směr a osa T' je druhý příčný směr. Dále je na obrázku vyznačen celkový objem vláken V_f , matrice V_m a celková hmotnost vláken M_f , matrice M_m . Pro tyto uvedené veličiny zavádíme tzv. objemový podíl v_i a hmotnostní podíl m_i , pro které platí:

$$v_f = \frac{V_f}{V_c}, \quad m_f = \frac{M_f}{M_c}, \quad v_m = \frac{V_m}{V_c}, \quad m_m = \frac{M_m}{M_c}, \quad (13)$$

kde V_c je celkový objem a M_c je celková hmotnost kompozitu. Předpokládáme, že objem i hmota zůstává zachována, tudíž můžeme psát podmínky

$$v_c = v_f + v_m, \quad m_c = m_f + m_m. \quad (14)$$

Vztahy (13) a (14) jsou důležité pro další výpočty KM, uvedených v následujících podkapitolách [14].

4.2. Podélný modul pružnosti a podélná pevnost

Opět uvažujeme jednoduchý výpočtový model, na který působí tahové zatížení v podélném směru (viz Obr. 7). Vycházíme z podmínky silové ekvivalence, kdy síla působící na kompozit F_c je rovna součtu síly působící na vlákna F_f a síly působící na matici F_m . Síly působí na stejné nositelce.

Provedením potřebných úprav dostaneme v konečném důsledku směšovací pravidlo pro napětí ve tvaru

$$\sigma_{cL} = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m = \sum_i \sigma_i v_i, \quad (15)$$

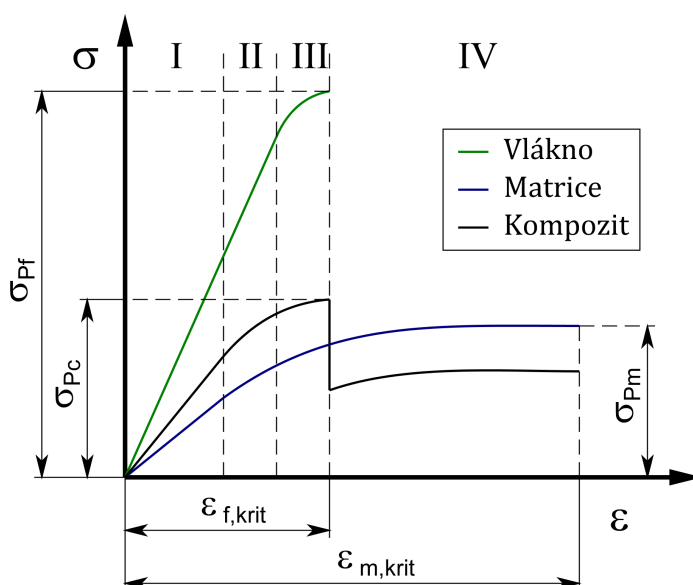
kde σ_{cL} je podélné napětí v KM, σ_f je napětí ve vláknu a σ_m je napětí v matrici. Obecně může být KM tvořen několika složkami i . Potom σ_c je rovno součtu daných složek i , jak je uvedeno ve vztahu (15). Na základě definovaného směšovacího pravidla, jsme schopni vytvořit tahový diagram KM. Chovají-li se všechny složky při zatěžování lineárně, pak i průběh je lineární. Pokud je nějaká složka, která má nelineární chování, pak průběh je nelineární. To dokládá i tahový diagram na obrázku 8, který je rozdělen do čtyř oblastí:

- I. lineárně pružné chování vlákna i matrice
- II. lineárně pružné chování vlákna, pružně plastické chování matrice
- III. pružně plastické chování vlákna i matrice
- IV. Vláknno prasklo, elasticko plastická chování matrice

Z první oblasti definujeme modul pružnosti KM v podélném směru. Pohybujeme se v lineárně pružné oblasti, kde matrice i vlákna jsou popsány pomocí Hookeova zákona. Za předpokladu stejného podélného přetvoření a dokonalé adheze lze modifikovat vztah (15) do tvaru směšovacího pravidla pro E_{cL}

$$E_{cL} = E_f v_f + E_m v_m = E_f v_f + E_m (1 - v_f), \quad (16)$$

kde E_f je modul pružnosti vlákna, E_m je modul pružnosti matrice. E_{cL} je modul pružnosti KM, který uvažujeme v naší problematice bimateriálového koncentrátoru jako E_L .



Obr. 8: Tahový diagram kompozitního materiálu v podélném směru.

Výše uvedené vztahy platí pouze pro ideální KM a v případě uvažování všech předpokladů. Ve skutečnosti jsou mechanické charakteristiky negativně ovlivňovány např. směrovou dezorientací vláken, či jejich rozdílnou pevností nebo přítomností zbytkových napětí v důsledku rozdílné teplotní deformace. Značný vliv má i kvalita mezifázového rozhraní matrice a výztuže.

4.3. Příčný modul pružnosti a příčná pevnost

Při návrhu KM se zaměřujeme především na podélný směr, který přenáší námi požadované zatížení. Ovšem nejen z bezpečnostních důvodů je nutné se zabývat i příčným směrem, kde jsou hodnoty odlišné. Zatímco v podélném směru se přípustná pevnost přenáší vlákna stanovená pomocí směšovacího pravidla (15), v příčném směru je dovolené napětí dané pevností matrice.

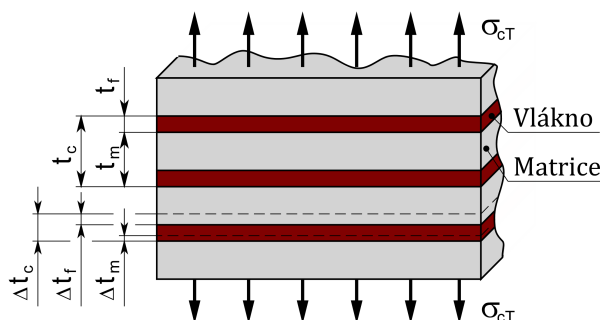
Pro odvození příčného modulu pružnosti opět vycházíme z jednoduchého rovinného modelu, uvedeného na obrázku 9. Vzhledem k periodické struktuře se zaměříme pouze na jednu charakteristickou dvojici, kde protažení kompozitu v příčném směru Δt_c je rovno součtu protažení v příčném směru vlákna Δt_f a matrice Δt_m . Získáváme tak další směšovací pravidlo pro přetvoření ve tvaru

$$\varepsilon_{cT} = \varepsilon_f v_f + \varepsilon_m v_m = \sum_i \varepsilon_i v_i, \quad (17)$$

kde ε_{cT} je přetvoření KM, ε_f je přetvoření vlákna a ε_m je přetvoření matrice. Za předpokladu lineárně pružného chování materiálu lze na vztah (17) aplikovat Hookeův zákon (pro matici, vlákna i KM). Z podmínek rovnováhy uvolněných prvků tělesa vyplývá, že příčné napětí ve vláknu je rovno příčnému napětí v matrici (tzn. platí $\sigma_{cT} = \sigma_m = \sigma_f$). Můžeme tedy psát vztah pro příčný modul pružnosti E_{cT} , který koresponduje s modulem E_T v naší problematice

$$\frac{1}{E_{cT}} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} = \sum_i \frac{v_i}{E_i}. \quad (18)$$

Vztah (18) je odvozen pro zjednodušený model. Ve skutečnosti je vlákno zcela obklopeno matricí, tzn. platí $\sigma_c \neq \sigma_m \neq \sigma_f$. Dále jsme zanedbali tzv. poissonovské efekty, které souvisejí s rozdílnými Poissonovými čísly vláken a matrice.



Obr. 9: Rovinný geometrický výpočtový model kompozitního materiálu.

Poissonovo číslo vlákna ν_f bývá obvykle menší než u matrice ν_m . Při zatížení v příčném směru by se vlákno chtělo zkracovat méně než matrice, čemuž ale brání vazba s matricí. Vzniká tak smykové napětí, které ve zjednodušeném modelu neuvažujeme. Při porovnání modulů E_L a E_T (resp. E_{cL} a E_{cT}) zjistíme, že u dlouhovláknového jednosměrného kompozitu je podélný tahový modul E_L vždy větší než příčný modul E_T .

4.4. Modul pružnosti ve smyku a Poissonovo číslo

Opět se zabýváme rovinným modelem (viz Obr. 9), kde posunutí pravého horního rohu, způsobené smykovým zatížením modelu, je dáno posuvem ve vláknech a v matrici. Za použití zkosů γ a tloušťek t můžeme psát směšovací pravidlo pro zkos kompozitu γ_c

$$\gamma_c = \gamma_f \nu_f + \gamma_m \nu_m = \sum_i \gamma_i \nu_i, \quad (19)$$

kde γ_f je zkos vlákna, γ_m je zkos matrice. Nyní postupujeme podobně jako v předchozím případě. Jelikož se pohybujeme v lineárně pružné oblasti, lze vztah (19) vyjádřit podle Hookeova zákona pomocí modulů pružnosti ve smyku G a smykového napětí τ . Z podmínek rovnováhy opět platí rovnost smykových napětí τ , a tudíž můžeme psát směšovací pravidlo pro G_{LT}

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{\nu_f}{G_f} + \frac{\nu_m}{G_m} = \sum_i \frac{\nu_i}{G_i}, \quad (20)$$

kde G_f je modul pružnosti ve smyku vlákna a G_m je modul pružnosti ve smyku matrice. Je nutné si opět uvědomit, že vztah (20) je odvozen s jistými předpoklady.

Napětí působící v podélném směru rovinného modelu, způsobí v příčném směru kontrakci Δt_{cL} , které je dané součtem kontrakce vláken Δt_f a matrice Δt_m . Tyto tři veličiny lze vyjádřit pomocí poměrného přetvoření ($|\Delta t_i| = t_i \nu_i \varepsilon_i$). Předpokládáme stejné protažení složek v longitudiální směru, tudíž platí rovnost $\varepsilon_L = \varepsilon_f = \varepsilon_m$. Můžeme tak psát směšovací pravidlo pro Poissonovo číslo dlouhovláknového kompozitu ν_{LT}

$$\nu_c = \nu_{LT} = \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m = \sum_i \nu_i \nu_i, \quad (21)$$

kde ν_f je Poissonovo číslo vlákna, ν_m matrice. Je nutné si opět uvědomit, že vztahy (20) a (21) jsou odvozeny s jistými předpoklady [14].

4.5. Konstitutivní vztahy

Na základě výše definovaných směšovacích pravidel jsme nyní schopni stanovit potřebné konstitutivní vztahy. Omezíme se pouze na lineárně pružný model. V případě nejobecnějšího anizotropního materiálu lze vyjádřit Hookeuv zákon v inverzním tvaru, pomocí Einsteinova sumační symboliky:

$$\varepsilon_j = S_{ij} \sigma_i. \quad (22)$$

Symbol σ_i je vektor napětí $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T$, ε_j je vektor přetvoření $\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T$. S_{ij} je matice poddajnosti, která obsahuje 36 prvků, přičemž platí relace (lze dokázat pomocí měrné energie napjatosti) [14].

$$S_{ij} = S_{ji}. \quad (23)$$

Ze vztahu (23) vyplývá, že matice S_{ij} je symetrická a má 21 nezávislých materiálových konstant a je symetrická podél hlavní diagonály.

Podívejme se nyní na případ ortotropního materiálu. Maticový zápis poddajnosti S (s tzv. inženýrskými charakteristikami, které mají jasný fyzikální či geometrický význam) bude mít nyní tvar

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

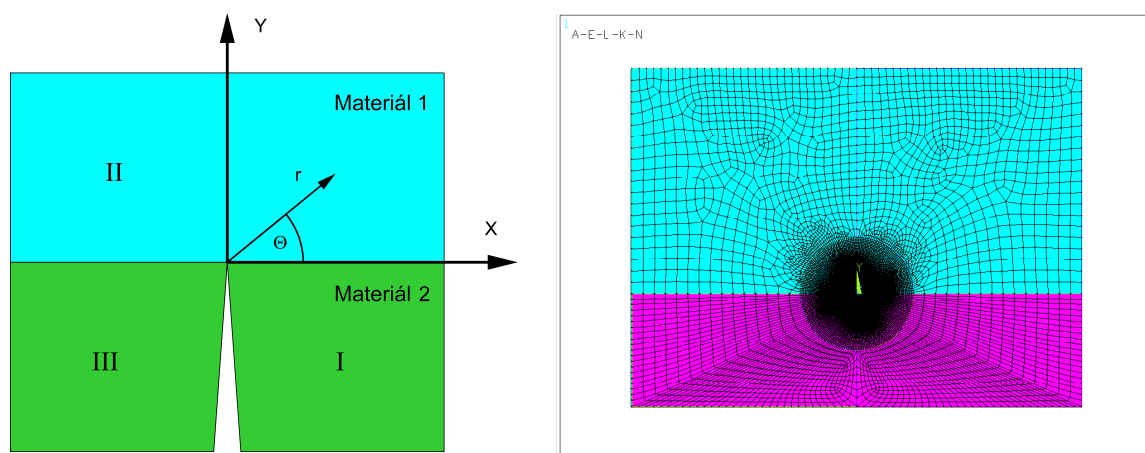
kde jednotlivé prvky jsou získány na základě výše popsaných směšovacích pravidel. Vidíme, že matice je stále symetrická, ovšem počet jejích nezávislých materiálových konstant se zredukoval na 9. K popisu je potřeba těchto parametrů: $E_x, E_y, E_z, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zx}, G_{xy}, G_{yz}$ a G_{zx} . Zbývající konstanty ($\nu_{yx}, \nu_{zy}, \nu_{xz}$) vystupující v prvcích matice poddajnosti se dopočítají na základě podmínky symetrie (23) [14].

5. Řešení problému

Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole, naše konfigurace se skládá ze dvou dokonale spojených ortotropních materiálů, které se vyznačují třemi navzájem nezávislými ortogonálními směry mechanických vlastností. Je to speciální případ anizotropie, popsany devíti nezávislými elastickými konstantami. Příkladem ortotropního materiálu je dvousložkový kompozit s dlouhými vyztužujícími vlákny. V případě rovinné úlohy se jedná o tzv. laminu, kde třetí osu symetrie zanedbáváme. Tím se počet nezávislých parametrů redukuje na čtyři (E_x , E_y , G_{xy} a ν_{xy}). Je nutné mít na paměti, že uvedené elastické konstanty jsou konstantami celkového kompozitu. Pokud máme materiál s vlákny ve směru osy x , potom E_x reprezentuje podélný a E_y příčný modul pružnosti (hodnota E_x je vyšší než hodnota E_y). V našem případě jsou vždy vlákna jednoho materiálu kolmé na vlákna materiálu druhého (viz Obr. 10).

Trhlina proniká materiálem 2 a rozděluje soustavu na tři oblasti (I, II a III). Počátek polárního souřadnicového systému je na čele trhliny. Numerický model bude vytvořen v prostředí *Ansys*. Pro snadnější uživatelské použití bude vytvořeno makro, které v sobě zahrnuje nejen geometrii a hustotu sítě modelu, ale i samotný výpočet skutečného řešení a výpis hodnot pro další zpracování. Vstupujícími parametry budou Youngovy moduly E_L , E_T a E_z , přičemž hodnoty ve směrech y a z jsou stejné (z důvodu rovinné úlohy, viz výše). Vlastnosti materiálů konfigurace budeme měnit právě na základě těchto hodnot. Dále zadáme hodnoty modulů ve smyku G_{ij} a hodnoty Poissonových čísel ν_{ij} . Tyto tři typy elastických konstant zadáme postupně pro oba materiály soustavy. Mezi další vstupní parametry zařadíme poloměr integrační cesty, úhel sklonu trhliny od kladné osy x (úhel α), velikost zatížení a rozměry modelu. Posledním vstupujícím parametrem bude počet hodnot, reprezentující hustotu sítě. Po nadefinování uvedených hodnot a spuštění makra v *Ansysu* získáme soubor výstupních hodnot, které následně použijeme v dalších výpočtech prováděné v prostředí *Matlab*.

V následujících podkapitolách jsou odvozeny teoretické vztahy potřebné pro řešení problému. Nejprve je nutné stanovit charakteristické vlastní číslo singularity δ pomocí teorie komplexních potenciálů. Společně s numerickými výsledky, získaných z programu *Ansys*, vypočítáme hledaný zobecněný faktor intenzity napětí H_k . Poté jsme schopni určit průběhy napětí a posuvů v okolí koncentrátoru.



Obr. 10: Vlevo: Schéma konfigurace; Vpravo: Konečno-prvková síť.

5.1. Exponent singularity

Pro určení exponentu singularity použijeme Lechnického-Strohova formalismu, který je vhodný právě pro řešení dvourozměrných anizotropních elastických problémů. Každý anizotropní materiál je charakterizován, kromě elastických konstant, také třemi komplexními čísly μ , které jsou charakteristickými čísly homogenní algebraické soustavy rovnic ve tvaru [12]

$$\{C_{i1k1} + \mu(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + \mu^2 C_{i2k2}\}a_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (25)$$

kde a_k je vlastní vektor a C_{ijkl} jsou elastické koeficienty. Soustava rovnic (25) má nenulové řešení, jestliže determinant složené závorky je roven nule. Tím získáme polynom šestého řádu, jehož řešením jsou tři komplexní charakteristická čísla μ_i a jejich komplexně sdružené protějšky $\bar{\mu}_i$.

Vztah (25) platí obecně pro anizotropní materiály. Pokud matice tuhosti vykazuje určitou symetrii, jak je tomu např. u ortotropních materiálů, pak se počet charakteristických čísel μ_i a $\bar{\mu}_i$ redukuje na dvě. Polynom čtvrtého řádu, je ve tvaru

$$\lambda\mu^4 + 2\rho\lambda^{1/2}\mu^2 + 1 = 0, \quad (26)$$

kde

$$\lambda = \frac{s_{11}}{s_{22}}, \quad \rho = \frac{2s_{12} + s_{66}}{2\sqrt{s_{11}s_{22}}}. \quad (27)$$

Členy s_{ij} jsou prvky matice tuhosti (24). Charakteristická čísla μ_i získáme jednoduše z následujících vztahů

$$\begin{aligned} \mu_1 &= i\lambda^{-1/4}(n+m), \quad \mu_2 = i\lambda^{-1/4}(n-m) \quad \text{pro } 1 < \rho < \infty, \\ \mu_1 &= \lambda^{-1/4}(in+m), \quad \mu_2 = \lambda^{-1/4}(in-m) \quad \text{pro } -1 < \rho < 1, \\ \mu_1 &= \mu_2 = i\lambda^{-1/4} \quad \text{pro } \rho = 1, \end{aligned} \quad (28)$$

kde

$$n = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}, \quad m = \sqrt{\left|\frac{1-\rho}{2}\right|}. \quad (29)$$

Případ $\rho = 1$ odpovídá materiálu s kubickou symetrií a případ $\lambda = \rho = 1$ odpovídá izotropnímu materiálu. Jedná se o speciální (tzv. degenerované) případy anizotropie, na který nelze aplikovat Lechnického-Strohův formalismu.

Posuvy u_i a výslednou sílu T_i podél polopřímky vycházející z počátku souřadnic ortotropního materiálu hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^2 A_{ij} f_j(z_j) + \sum_{j=1}^2 \overline{A_{ij}} f_j(\overline{z_j}), \quad \text{pro } i = 1, 2 \\ T_i &= \sum_{j=1}^2 L_{ij} f_j(z_j) + \sum_{j=1}^2 \overline{L_{ij}} f_j(\overline{z_j}), \quad \text{pro } i = 1, 2 \end{aligned} \quad (30)$$

kde $z_j = x + \mu_j y$, $(\overline{})$ značí komplexní sdružení a $f_j(z_j)$ jsou vhodné analytické komplexní potenciály (viz dodatek A1). Matice A_{ij} a L_{ij} jsou ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} s_{11}\mu_1^2 + s_{12} & s_{11}\mu_2^2 + s_{12} \\ s_{12}\mu_1 + s_{22}/\mu_1 & s_{12}\mu_2 + s_{22}/\mu_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{vmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Pro složky tenzoru napětí platí podobně [11]

$$\begin{aligned} \sigma_{1i} &= \sum_{j=1}^2 L_{ij} f'_j(z_j) + \sum_{j=1}^2 \overline{L_{ij}} f'_j(\overline{z_j}) \quad \text{pro } i = 1, 2 \\ \sigma_{2i} &= \sum_{j=1}^2 \mu_j L_{ij} f'_j(z_j) + \sum_{j=1}^2 \overline{\mu_j} \overline{L_{ij}} f'_j(\overline{z_j}) \quad \text{pro } i = 1, 2 \end{aligned} \quad (32)$$

kde funkce $f'_j(z_j)$ je derivací podle z_j .

Nyní musíme vhodně zvolit neznámou analytickou funkci $f_j(z_j)$, přičemž je nutné zajistit, aby vyhovovala okrajovým podmínkám (viz dodatek A2) ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^I &= 0 \quad \text{pro } \theta = -\pi/2, \\ \mathbf{T}^I - \mathbf{T}^{II} &= 0 \quad \text{pro } \theta = 0, \\ \mathbf{T}^{II} - \mathbf{T}^{III} &= 0 \quad \text{pro } \theta = \pi, \\ \mathbf{T}^{III} &= 0 \quad \text{pro } \theta = 3\pi/2, \\ \mathbf{u}^I - \mathbf{u}^{II} &= 0 \quad \text{pro } \theta = 0, \\ \mathbf{u}^{II} - \mathbf{u}^{III} &= 0 \quad \text{pro } \theta = \pi, \end{aligned} \quad (33)$$

kteří říkají, že na lomových plochách trhliny jsou výsledné síly nulové, zatímco na rozhraní jsou si rovny. Totéž platí i pro posuvy. Index $J = I, II, III$ značí oblasti rozhraní (viz obr. 10). Vzhledem k charakteru úlohy budeme předpokládat následující tvar komplexních potenciálů $f_j(z_j)$

$$f_j^J(z_j) = \phi_j^J z_j^{J\delta} \quad (34)$$

kde ϕ_j^J jsou složky obecně komplexního vektoru odpovídající oblasti J , δ je charakteristické číslo exponentu singularity.

Pro matici $\mathbf{z}^{J\delta}$ platí

$$\mathbf{Z}^{J\delta} = \text{diag}[z_1^{J\delta}, z_2^{J\delta}] = r^\delta \text{diag}[(\cos \theta + \mu_1^J \sin \theta)^\delta, (\cos \theta + \mu_2^J \sin \theta)^\delta] \quad (35)$$

kde diag značí diagonální matici. Pomocí předpokladu (35) a vztahu (30) lze vyjádřit posuvy a výslednou sílu ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^J &= \mathbf{A}^J \mathbf{Z}^{J\delta} \mathbf{L}^{J-1} \mathbf{v}^J + \overline{\mathbf{A}}^J \overline{\mathbf{Z}}^{J\delta} \overline{\mathbf{L}}^{J-1} \overline{\mathbf{v}}^J, \\ -\mathbf{T}^J &= \mathbf{L}^J \mathbf{Z}^{J\delta} \mathbf{L}^{J-1} \mathbf{v}^J + \overline{\mathbf{L}}^J \overline{\mathbf{Z}}^{J\delta} \overline{\mathbf{L}}^{J-1} \overline{\mathbf{v}}^J. \end{aligned} \quad (36)$$

Vtah (36) definujeme zvlášť pro jednotlivé oblasti konfigurace, tj. $J = I, II$ a III . Tak získáme soustavu homogenních algebraických rovnic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_0^I & -\overline{\mathbf{B}}_0^I & -\mathbf{B}_0^{II} & \overline{\mathbf{B}}_0^{II} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_0^I & \overline{\mathbf{X}}_0^{II} & -\mathbf{X}_0^{II} & -\overline{\mathbf{X}}_0^{II} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^{II} & -\overline{\mathbf{B}}_1^{II} & -\mathbf{B}_1^{III} & \overline{\mathbf{B}}_1^{III} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{II} & \overline{\mathbf{X}}_1^{II} & \mathbf{X}_1^{III} & -\overline{\mathbf{X}}_1^{III} \\ \mathbf{X}_2^I & \overline{\mathbf{X}}_2^I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_3^{III} & \overline{\mathbf{X}}_3^{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^I \\ \overline{\mathbf{v}}^I \\ \mathbf{v}^{II} \\ \overline{\mathbf{v}}^{II} \\ \mathbf{v}^{III} \\ \overline{\mathbf{v}}^{III} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (37)$$

kde nulové prvky 0_{ij} jsou nulové čtvercové matice druhého řádu, na pravé straně rovnice je vektor 0_i o dvanácti nulových složkách a matice \mathbf{B} a \mathbf{X} jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_j^J &= i\mathbf{A}^J \mathbf{Z}_j^{J\delta} \mathbf{L}^{J-1}, \quad \mathbf{X}_j^J = \mathbf{L}^J \mathbf{Z}_j^{J\delta} \mathbf{L}^{J-1}, \\ \mathbf{Z}_0^J &= \text{diag}[1, 1], \quad \mathbf{Z}_1^J = \text{diag}[e^{i\pi\delta}, e^{i\pi\delta}], \quad \mathbf{Z}_2^J = \text{diag}\left[|\mu_1^J|^\delta e^{-i\alpha\delta}, |\mu_2^J|^\delta e^{-i\alpha\delta}\right], \\ \mathbf{Z}_3^J &= \text{diag}\left[|\mu_1^J|^\delta e^{i(2\pi-\alpha)\delta}, |\mu_2^J|^\delta e^{i(2\pi-\alpha)\delta}\right] \end{aligned} \quad (38)$$

kde j značí rozhraní podél kladné osy x ($j = 0$), rozhraní podél záporné osy x ($j = 1$), pravou ($j = 2$) a levou ($j = 3$) lomovou plochu trhliny. Soustava (37) lze upravit do soustavy pouze o dvou rovnicích

$$\mathbf{K}(\delta) \mathbf{v}^I = \mathbf{0} \quad (39)$$

Zde máme nulový vektor 0_i o dvou prvcích, vektory \mathbf{v}^I hledáme ve tvaru

$$\mathbf{v}^I = \frac{1}{H_k} \mathbf{L}^I \Phi^I, \quad (40)$$

kde H_k je zobecněný faktor intenzity napětí (viz níže).

Čtvercovou matici K_{ij} můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \bar{\mathbf{X}}_1'' (\mathbf{I} - \mathbf{Y}_2') + \left(\mathbf{X}_1''' - \bar{\mathbf{X}}_1''' \mathbf{Y}_3''' \right) \left(\mathbf{B}_1''' + \bar{\mathbf{B}}_1''' \mathbf{Y}_3''' \right)^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1'' (\mathbf{I} - \mathbf{Y}_2') \\ & + \left(\mathbf{X}_1'' - \bar{\mathbf{X}}_1'' - \left(\mathbf{X}_1''' - \bar{\mathbf{X}}_1''' \mathbf{Y}_3''' \right) \left(\mathbf{B}_1''' + \bar{\mathbf{B}}_1''' \mathbf{Y}_3''' \right)^{-1} \left(\mathbf{B}_1'' + \bar{\mathbf{B}}_1'' \right) \right) \\ & \times \left(\mathbf{B}_0'' + \bar{\mathbf{B}}_0'' \right)^{-1} \left(\mathbf{B}_0' + \mathbf{B}_0' \mathbf{Y}_2' + \mathbf{B}_0'' (\mathbf{I} - \mathbf{Y}_2') \right) \end{aligned} \quad (41)$$

kde

$$\mathbf{Y}_j' = \left(\bar{\mathbf{X}}_j' \right)^{-1} \mathbf{X}_j'$$

Symbol \mathbf{I} je čtvercová jednotková matice druhého řádu. Jelikož vektor \mathbf{v}' je obecně komplexní, je vhodné rovnici (39) převést na tvar

$$2\mathbf{K}\mathbf{I}(\mathbf{I} - \mathbf{Y}_2')^{-1} \text{Re}\{\mathbf{v}'\} = \mathbf{0} \quad (42)$$

Přestože je vztah (42), vzhledem k předchozímu vztahu (39), komplikovanější, poskytuje lepší manipulaci při aplikaci v nezbytných numerických prostředcích.

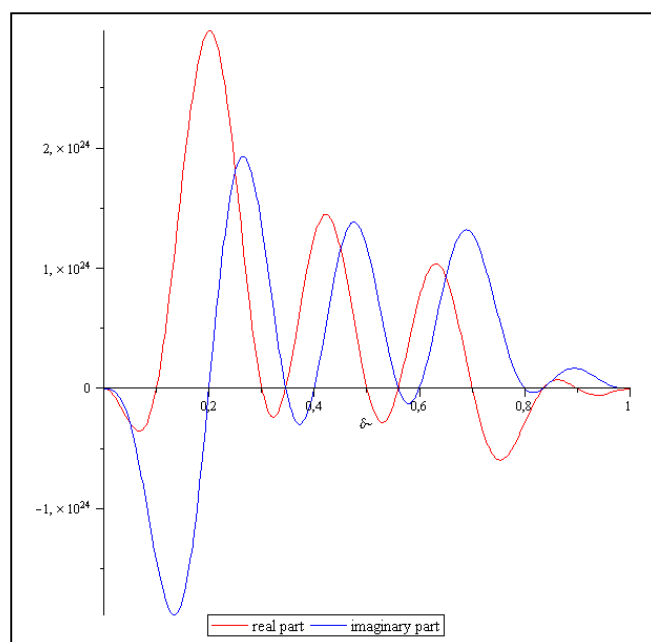
Aby rovnice (42) měla řešení, musí být determinant matice K_{ij} nulový.

$$\det(\mathbf{K}(\delta)) = 0 \quad (43)$$

Tím získáme nelineární rovnici s proměnnou δ o dvou kořenech, které odpovídají hledaným exponentům singularity. Lze je např. odečíst z grafické závislosti (viz Obr. 11), kde na vodorovné ose x jsou hodnoty δ , a na svislou osu vynášíme imaginární a reálné hodnoty determinantu \mathbf{K} . Jejich společný průsečík v nule (podmínka nulovosti determinantu) vyznačuje hledaný exponent. Trhlina kolmá na rozhraní má dva exponenty (tzn. dva průsečíky), které odpovídají různým způsobům zatěžování, tzn. tahovému módu I a smykovému módu v rovině, módu II (viz kapitola 3). Třetí průsečík, který vidíme v grafu, nemá fyzikální význam. Je to pouze řešení z matematického pohledu. Na rozdíl od izotropních materiálů, kdy je exponent rovný jedné polovině, je δ u anizotropních materiálů obecně v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Je dokázáno [9], že pokud je $(1-\delta)$ řešení rovnice (43), pak i číslo $(\delta-1)$ je řešením (43). Pokud bychom vykreslili průběh, zobrazený na obrázku 11 v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, získáme stejné hodnoty δ , ale s různými znaménky. Ovšem průběhy v intervalu $\langle -1, 0 \rangle$ nemají fyzikální význam. Jsou brány jako pomocná řešení. Podrobnější důkaz by vyžadoval hlubší matematickou teorii přesahující rozsah této práce.

Dosazením získaných exponentů zpět do rovnice (42) získáme reálnou složku vektoru \mathbf{v} . Na základě znalosti tohoto vektoru jsme schopni, pomocí vztahu (41), získat i vektory ve zbývajících částech konfigurace a popsat i napětí a deformace v okolí čela trhliny na bimateriálovém rozhraní pomocí vztahů (30) a (32) [12, 3].



Obr. 11: Příklad průběhu funkce charakteristické rovnice.

5.2. Zobecněný faktor intenzity napětí

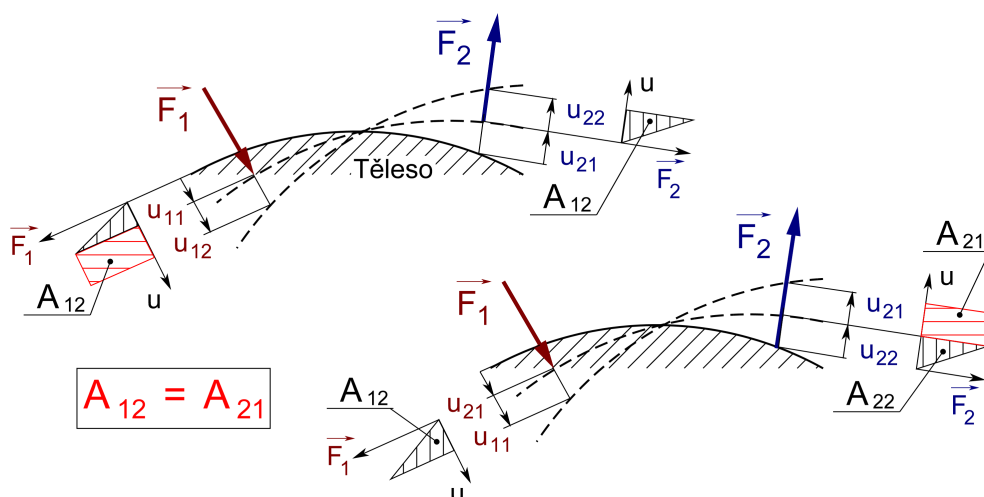
Za účelem stanovení konečného rozdělení napětí a posuvů kolem čela trhliny je nutné znát hodnotu zobecněného součinitele intenzity napětí H_k . Na rozdíl od stanovení faktoru intenzity K_I pro trhliny v izotropním homogenním prostředí, nenabízí dostupné komerční numerické systémy (Ansys) možnost vyjádření H_k . Je však nutné znát hodnotu H_k z numerického řešení pro konkrétní situaci s danou geometrií, materiálem a okrajovými podmínkami [10]. V případě ortotropního bimateriálu může být H_k stanoven pomocí tzv. ψ -integrálu, který je důsledkem platnosti Bettiho recipročního teorému, známém též jako věta o vzájemnosti prací. Při působení silových soustav π_1 , π_2 na lineárně pružné těleso platí [4]:

Práce soustavy π_1 na složkách deformace, vyvolaných soustavou π_2 , je rovna práci soustavy π_2 na složkách deformace, vyvolaných soustavou π_1 .

Jinými slovy máme těleso v nezatíženém stavu, na které působí dvě osamělé síly F_1 a F_2 . V průběhu zatěžování se těleso deformuje a působíště sil se posouvají. Označíme-li posuv působíště síly F_1 po její nositelce, způsobený působením síly F_2 , jako u_{12} , můžeme psát vztah

$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21}. \quad (44)$$

Vztah (36) říká, že práce síly F_1 na posuvech u_{12} (práce A_{12}), způsobených silou F_2 , je stejná jako práce síly F_2 na posuvech u_{21} (práce A_{21}) způsobené silou F_1 (viz Obr. 12).



Obr. 12: Působení silových soustav na lineárně pružné těleso.

Výše uvedený vztah (44) lze zobecnit [8]

$$\oint_C (\mathbf{u}^T \mathbf{t}^* - \mathbf{u}^{*T} \mathbf{t}) ds = 0, \quad (45)$$

kde \mathbf{u} , \mathbf{u}^* jsou posuvy a \mathbf{t} , \mathbf{t}^* jsou výsledné síly, přičemž \mathbf{u} , \mathbf{t} uvažujeme jako regulární řešení a \mathbf{u}^* , \mathbf{t}^* jako tzv. pomocné řešení. Z matematického hlediska je vztah (45) jistou formou skalárního součinu (není však komutativní). Jak regulární, tak pomocná řešení splňují podmínky statické rovnováhy a kompatibility, avšak pomocné řešení nemusí být řešením dané úlohy z fyzikálního úhlu pohledu. V (45) integrujeme přes uzavřenou integrační cestu C kolem koncentrátoru, která je složena z úseků C_ε , C_R , C_1 a C_2 (viz Obr. 13). Na základě okrajových podmínek, kdy na lomových plochách nepůsobí žádné zatížení, jsou integrály na úsecích C_1 a C_2 nulové (platí $\mathbf{t} = \mathbf{t}^* = \mathbf{0}$). Dále pro integrál na úseku C_ε platí

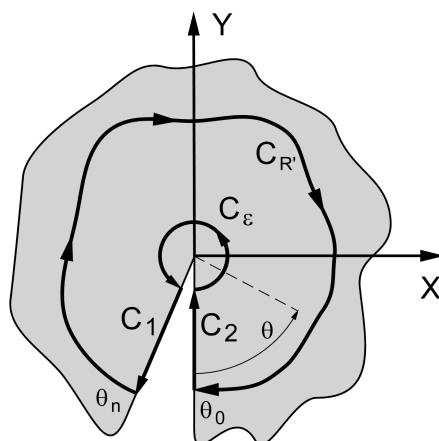
$$\int_{C_\varepsilon} (\mathbf{u}^T \mathbf{t}^* - \mathbf{u}^{*T} \mathbf{t}) ds = - \int_{C_{R'}} (\mathbf{u}^T \mathbf{t}^* - \mathbf{u}^{*T} \mathbf{t}) ds = \int_{C_R} (\mathbf{u}^T \mathbf{t}^* - \mathbf{u}^{*T} \mathbf{t}) ds. \quad (46)$$

Vztah (46) říká, že obě cesty C_ε i C_R směřují souhlasně proti směru hodinových ručiček z lomové plochy $\theta = 0$ do lomové plochy $\theta = \theta_n$ (viz Obr. 13). Tudíž lze ve vztahu (45) zvolit jednu integrační cestu $C = C_R$ kolem vrcholu trhliny.

Vzhledem k výše popsáným skutečnostem lze ψ -integrál definovat ve tvaru

$$\psi = \int_\Gamma (\mathbf{u}^T \mathbf{t}^* - \mathbf{u}^{*T} \mathbf{t}) ds, \quad (47)$$

kde Γ je libovolná (pro jednoduchost kruhová) integrační cesta obklopující kořen trhliny.

Obr. 13: Schéma integrační cesty ψ -integrálu.

Analytický popis napětí a posuvů (pomocí LES formalismu) umožňuje na základě relace mezi vektorem výsledné síly \mathbf{t} a funkcí napětí Φ ve tvaru $\mathbf{t} = \Phi_{,\theta}/r$ (za použití polárních souřadnic r a θ) vztah (47) upravit do tvaru

$$\psi = \int_{\theta_0}^{\theta_n} (\mathbf{u}^T \Phi_{,\theta}^* - \mathbf{u}^{*T} \Phi_{,\theta}) d\theta, \quad (48)$$

kde čárka v indexu značí derivaci podle příslušné proměnné. Stejně jako u úlohy určování exponentu singularity, hledáme vhodný tvar potenciálu f_j , ve tvaru

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= H v_1 z_1^\delta = H v_1 r^\delta R_1^\delta e^{i\delta\psi_1} \\ f_2(z_2) &= H v_2 z_2^\delta = H v_2 r^\delta R_2^\delta e^{i\delta\psi_2}, \end{aligned} \quad (49)$$

kde H je libovolná, obecně komplexní konstanta, v_i je vektor komplexních čísel, který odpovídá daným okrajovým podmínkám, příp. podmínkám spojitosti napětí a posuvů na rozhraní materiálů konfigurace, δ je vlastní číslo exponentu singularity, R_i a ψ_i vyjadřuje vztah mezi polárními souřadnicemi r , θ a souřadnicemi rR_i , ψ_i v komplexní rovině $\text{Re}z_i$ a $\text{Im}z_i$,

$$\begin{aligned} R_i^2(\theta) &= (\cos \theta + \mu'_i \sin \theta)^2 + (\mu''_i \sin \theta)^2, \\ \psi_i(\theta) &= \begin{cases} 0 & \text{pro } \theta = 0 \\ \arccot((\cos \theta + \mu'_i \sin \theta) / \mu''_i \sin \theta) & \text{pro } \theta \in (0, \pi) \\ \arccot((\cos \theta + \mu'_i \sin \theta) / \mu''_i \sin \theta) - \pi & \text{pro } \theta \in (-\pi, 0) \\ -\pi & \text{pro } \theta = -\pi, \end{cases} \end{aligned} \quad (50)$$

Výrazy μ'_i a μ''_i značí reálnou a imaginární část kořene μ_i charakteristické rovnice (26).

Za předpokladu že H a δ jsou reálné, můžeme na základě (49) zavést funkce η_i a λ_i závislé pouze na úhlu θ ,

$$\begin{aligned}\eta_i(\theta) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ A_{i1} v_1 e^{\delta(\ln R_1(\theta) + i\psi_1(\theta))} + A_{i2} v_2 e^{\delta(\ln R_2(\theta) + i\psi_2(\theta))} \right\}, \\ \lambda_i(\theta) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ L_{i1} v_1 e^{\delta(\ln R_1(\theta) + i\psi_1(\theta))} + L_{i2} v_2 e^{\delta(\ln R_2(\theta) + i\psi_2(\theta))} \right\},\end{aligned}\quad (51)$$

kde prvky matice A_{ij} a L_{ij} získáme ze vztahu (31). Jak již víme, v těsné blízkosti trhliny jsou napětí a posuvy ovlivňovány především exponentem singularity $\delta-1$, resp. charakteristickým vlastním číslem δ . V naší úloze vystupují dva reálné kořeny δ , které odpovídají smíšeným módům 1 a 2, v případě trhliny skloněné k rozhraní pod libovolným úhlem, nebo módům I a II, v případě trhliny kolmé k rozhraní. Z tohoto důvodu nám musí vyjít dva zobecněné faktory intenzity napětí H . Pro funkci napětí Φ_i a posuvy u_i dostaneme [3]

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(r, \theta) &= H r^{1-\delta} \boldsymbol{\eta}(\theta), \\ \Phi(r, \theta) &= H r^{1-\delta} \boldsymbol{\lambda}(\theta),\end{aligned}\quad (52)$$

Vztah (48) lze dále zjednodušit. Dosazením vztahu (52) do (48) dostaneme

$$\boldsymbol{\psi} = H \boldsymbol{\psi}^*, \quad (53)$$

kde

$$\boldsymbol{\psi}^* = \int_{\theta_0}^{\theta_n} \left\{ \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \boldsymbol{\lambda}'^*(\theta) - \boldsymbol{\eta}^{*T}(\theta) \boldsymbol{\lambda}'(\theta) \right\} d\theta. \quad (54)$$

Symbol (') značí derivaci podle θ . Ze vztahu (54) je patrné, že $\boldsymbol{\psi}$ -integrál je nezávislý na poloměru integrační cesty. $\boldsymbol{\psi}$ na levé straně vztahu (53) lze určit pomocí (47) po cestě, která není ovlivňována singularitou. Odtud plyne výraz

$$H = \boldsymbol{\psi}^{*-1} \boldsymbol{\psi}, \quad (55)$$

kde H je hledaný zobecněný faktor intenzity napětí [3].

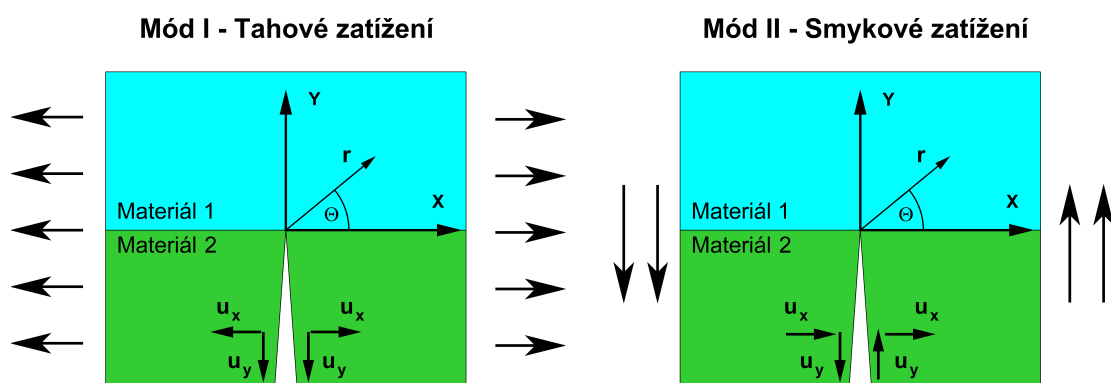
V tuto chvíli již máme definované vše potřebné k vyjádření pole napětí a posuvů kolem trhliny nacházející se na bimateriálovém rozhraní. Vztahy se mohou psát ve tvaru

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{H_{k1}}{\sqrt{2\pi}} r^{\delta_1-1} \lambda'_1(\theta) + \frac{H_{k2}}{\sqrt{2\pi}} r^{\delta_2-1} \lambda'_2(\theta), \\ u_i &= \frac{H_{k1}}{\sqrt{2\pi}} r^{\delta_1} \eta_1(\theta) + \frac{H_{k2}}{\sqrt{2\pi}} r^{\delta_2} \eta_2(\theta),\end{aligned}\quad (56)$$

kde σ_{ij} jsou složky tenzoru napětí, u_i jsou složky posuvů, r a θ jsou polární souřadnice. η_i a λ_i jsou bezrozměrné funkce dané vztahy (51), které odpovídají vlastním číslům exponentu singularity δ_1 a δ_2 . H_{ki} je zobecněný faktor intenzity

napětí ze vztahu (55) a $\delta_i - 1$ je exponent singularity, získaný pomocí vztahu (43). Je-li trhlina kolmá na rozhraní, tak pro $i = 1$ odpovídá H_{ki} a δ_i tahovému módu I. V případě $i = 2$, uvedené veličiny odpovídají druhému smykovému módu II. Je-li trhlina skloněná pod libovolným úhlem vůči rozhraní, faktory H kombinují oba módy I, II a značí se H_1 a H_2 .

U trhliny kolmé k rozhraní, lze pořadí vlastních čísel δ_i (a jim odpovídající faktory H_k) zjistit z průběhů posuvů (viz Obr. 14). Máme-li tahové zatížení, trhlina je rozevírána, tzn. posuvy v ose x na lomových plochách jsou nesouhlasné a tvar křivky je antisymetrický. Naopak posuvy v ose y jsou souhlasné (viz Obr. 14) a tvar je symetrický. V tomto případě mluvíme o tahovém exponentu a značíme je indexem 1. Pro smykové zatížení je tomu přesně naopak a exponent značíme indexem 2. Dále je důležité, aby průběhy byly spojitě z důvodů soudržnosti celé soustavy a podmínek definovaných výše (viz dále).



Obr. 14: Schéma směrů posuvů pro jednotlivé zatěžovací módy.

Jiný způsob určování zobecněného faktoru intenzity napětí je pomocí tzv. přímé metody. Obecně porovnává výsledky z analytického vyjádření s výsledky numerickými. Nejčastěji používaným porovnávacím parametrem je tangenciální napětí $\sigma_{\theta\theta}$, vyjádřené obdobně jako v (56), ale v polárních souřadnicích [6]

$$\sigma_{m\theta\theta} = \sum_{k=1}^2 \frac{H_k}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_k} F_{\theta\theta k m} . \quad (57)$$

Symbol r a θ značí polární souřadnice, H_k je hledaný faktor intenzity napětí a $F_{\theta\theta k m}$ je bezrozměrná funkce, které odpovídá exponent singularity p_k . Indexem m rozlišujeme materiály 1 nebo 2, ve kterých bylo napětí $\sigma_{\theta\theta}$ určováno.

V případě, šikmé trhliny je rozložení napětí okolo koncentrátoru popsáno kombinací faktorů H_1 a H_2 , a je nutné řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Z tohoto důvodu jsou hodnoty tangenciálního napětí $\sigma_{\theta\theta}$ určeny z numerického řešení pro dva rozdílné úhly θ_1 a θ_2 . Soustava rovnic je pak ve tvaru

$$\begin{bmatrix} r^{-p_1} F_{\theta\theta 1 m}(\theta_1) & r^{-p_2} F_{\theta\theta 1 m}(\theta_1) \\ r^{-p_1} F_{\theta\theta 1 m}(\theta_2) & r^{-p_2} F_{\theta\theta 1 m}(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{m\theta\theta}(r, \theta_1) \\ \sigma_{m\theta\theta}(r, \theta_2) \end{bmatrix} . \quad (58)$$

Hledané zobecněné faktory H_1 a H_2 jsou stanoveny na základě extrapolace soustavy (58) pro poloměr $r = 0$. V případě trhliny kolmé na rozhraní, se může předchozí systém rovnic redukovat na jednu, odpovídající danému módu zatěžování [7].

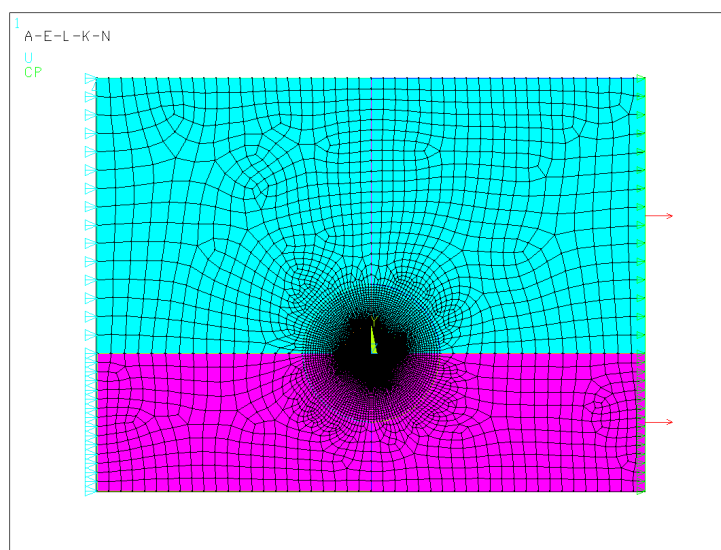
6. Popis výpočtových programů

Pro stanovení singulárního pole napětí jsou použity softwarové systémy *Maple*, *Matlab* a *Ansys*. V první řadě stanovíme charakteristické číslo exponentu singularity δ pomocí programu *Maple*, který je rozdělen do čtyř částí. První úsek je věnován vstupním hodnotám. Zadáváme zde elastické konstanty materiálů konfigurace v longitudiálním, transversálním a příčném směru. Dále natočení vláken vůči hlavnímu souřadnicovému systému (vůči kladné ose x), úhel sklonu trhliny od kladné osy x a přibližnou hodnotu charakteristického čísla δ . Je to taková hodnota, která je stanovena na základě průběhu imaginární a reálné složky determinantu matice K uvedené ve vztahu (43). Určujeme tak, které číslo δ resp. který průsečík, chceme počítat. Dalšími vstupními daty jsou hodnoty pro numerické výpočty v programu *Ansys*. Jsou to např. rozměry modelu konfigurace, velikost zatížení, poloměr integrační cesty nebo počet hodnot reprezentující hustotu sítě.

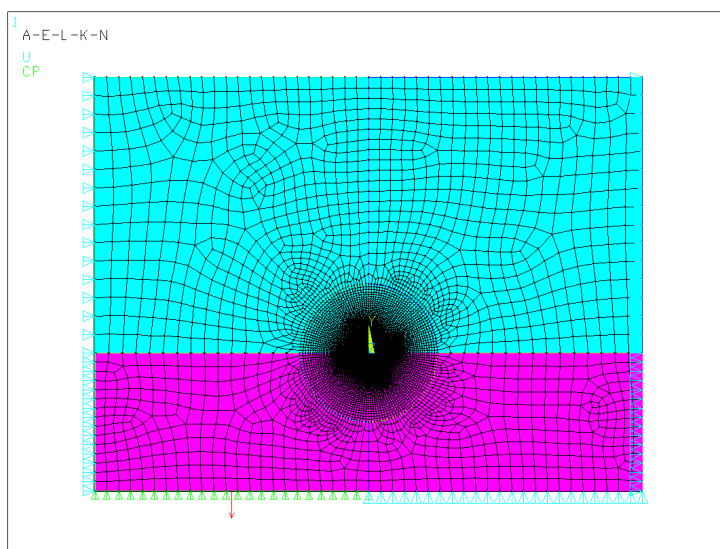
V druhé části programu *Maple* jsou vytvořeny matice poddajnosti (24) pro oba materiály konfigurace, jejichž prvky jsou přepočítány do hlavního souřadnicového systému pro rovinnou napjatost. Následně se vytvoří soubor *vstup_data_ansys.txt*, který obsahuje vše potřebné pro výpočet v softwaru *Ansys*. Kromě zadaných hodnot, najdeme v souboru také elastické konstanty materiálů.

V další části dojde k vytvoření analytického vztahu matice K pomocí výše popsané teorie a vytvoření průběhu zobrazeného na obrázku 11. Poté program vypočítá hodnotu průsečíku reálné a hodnotu průsečíku imaginární složky determinantu K . Jak již bylo uvedeno v kapitole 5.1, je nutné zajistit, aby tyto dvě hodnoty byly stejné. Pokud se sobě nerovnjí, změníme přibližnou hodnotu charakteristického čísla δ . Ve zbylé části program vypočítá potřebné matice (31), vlastní vektory v_i uvedené v (37) a kořeny charakteristické rovnice (26). Vše zapíše, společně s regulárním řešením (δ) a pomocným řešením ($-\delta$) charakteristického čísla, do souboru *vl_vektory_z_maplu.m*.

V druhém kroku použijeme softwaru *Ansys* a vytvořených maker pro získání hodnot numerického řešení. Po načtení údajů ze souboru *vstup_data_ansys.txt*, program definuje modely materiálů a geometrii konfigurace, na kterou následně



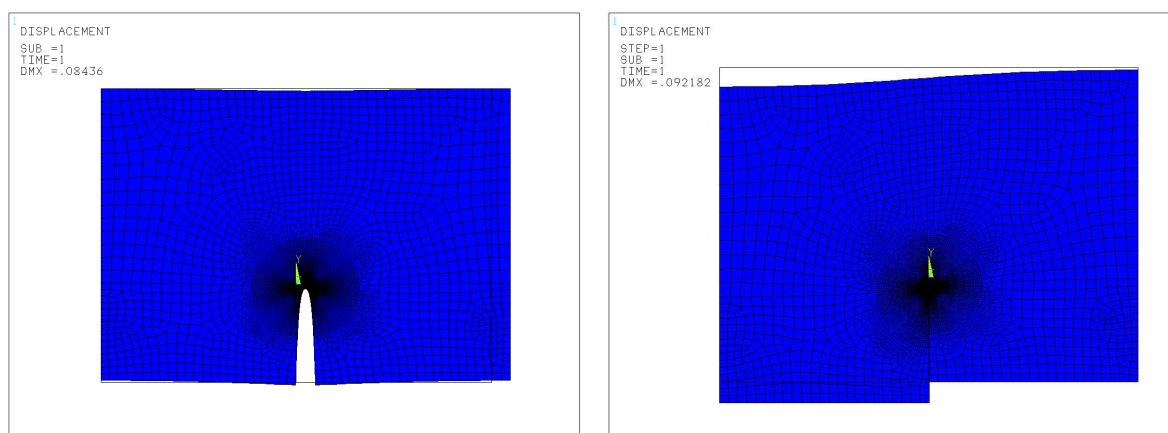
Obr. 15: Zatěžující a okrajové podmínky numerického modelu *trhlina_tah.mac*



Obr. 16: Zatěžující a okrajové podmínky numerického modelu *trhlina_smyk.mac*

vytvoří síť konečných prvků. Velikost zvoleného rovinného, čtyř uzlového, prvku (*Plane 182*) je měněna v závislosti na zadané referenční hodnotě *počet_hodnot*. Následuje aplikace okrajových a zatěžujících podmínek (viz. Obr. 15, 16). Počítáme-li exponent singularity odpovídající tahovému módu I, použijeme makra *trhlina_tah.mac*. V opačném případě použijeme makra *trhlina_smyk.mac*. Po provedení výpočtů, program načítá požadované hodnoty v nodech na zvolené integrační cestě o poloměru R , které následně vypisuje do souboru *vystup_data_ansys.txt*.

V poslední fázi výpočtu zpracováváme vygenerované hodnoty v prostředí *Matlab*. Soubor *GSIF_calculation.m* nejprve načte hodnoty z *Ansysu*. Následně vytvoří pomocné a singulární řešení pomocí funkce *SingularSolution.m*, kde program načítá a zpracovává hodnoty z *Maple* (*vl_vektory_z_maplu.m*). Všechny údaje zapisuje do jedné matice, kterou následně integruje podle výše odvozené teorie (viz kapitola 5.2.). Poté program vypíše hodnotu zobecněného faktoru intenzity H odpovídající příslušnému charakteristickému číslu exponentu singularity δ . Dále vykreslí průběhy napětí a posuvů pro jednotlivá řešení (viz níže).



Obr. 17: Deformované numerické modely po aplikaci:
Vlevo – tahového zatížení; Vpravo – smykového zatížení;

7. Diskuse

V této kapitole jsou vyhodnoceny numerické výsledky, které byly získány z výpočtových programů. V případě analýzy vlivu charakteristického čísla δ na úhel trhliny α vůči rozhraní, proběhlo testování algoritmů pro tři případy materiálových konfigurací. Jak již bylo uvedeno, naše úloha se skládá ze dvou ortotropních materiálů, popsanych devíti elastickými konstantami. Jejich hodnoty jsou stanoveny v následující tabulce 1.

Konfigurace pro δ	Materiál 1					Materiál 2				
	E_L [GPa]	$E_T = E_Z$ [GPa]	G_{xy} [GPa]	ν_{xy} [-]	φ [°]	E_L [GPa]	$E_T = E_Z$ [GPa]	G_{xy} [GPa]	ν_{xy} [-]	φ [°]
Případ 1	100	50	30	0.3	0	400	50	30	0.3	90
Případ 2						200	50	30	0.3	90
Případ 3						100	50	30	0.3	90

Tab. 1: Tabulka hodnot materiálových konfigurací, použitých při analýze charakteristického čísla δ

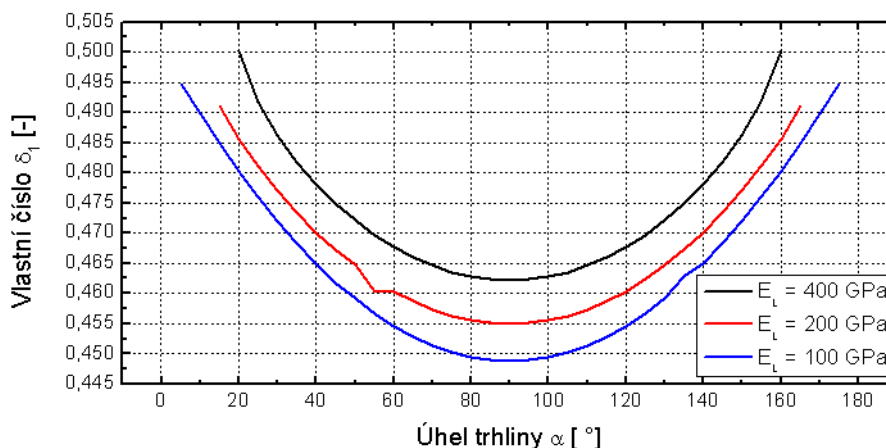
Při zbývajících analýzách spojených se zobecněným faktorem intenzity napětí H_k bylo použito jiných konfigurací, jejichž hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.

Konfigurace pro H_k	Materiál 1					Materiál 2				
	E_L [GPa]	$E_T = E_Z$ [GPa]	G_{xy} [GPa]	ν_{xy} [-]	φ [°]	E_L [GPa]	$E_T = E_Z$ [GPa]	G_{xy} [GPa]	ν_{xy} [-]	φ [°]
Případ 1	400	50	30	0.3	0	400	50	30	0.3	90
Případ 2	200	50	30	0.3	90	200	50	30	0.3	90

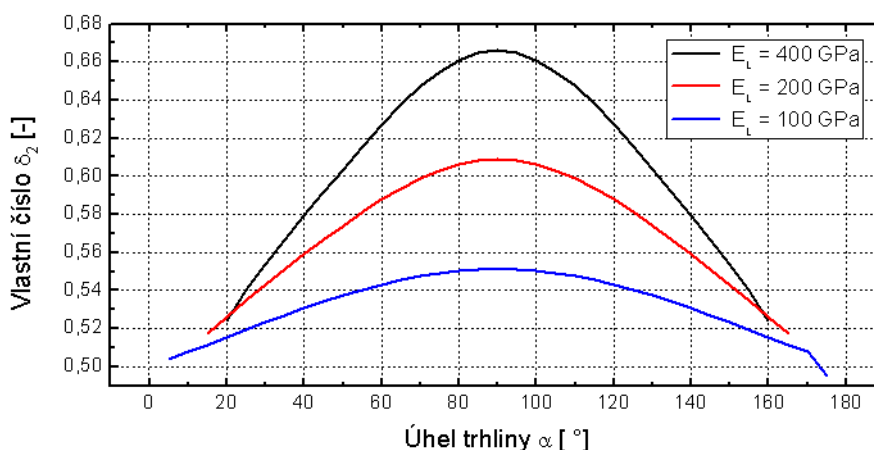
Tab. 2: Tabulka hodnot materiálových konfigurací, použitých při analýze zobecněného faktoru H_k

7.1. Výpočet exponentu singularity

Charakteristické číslo exponentu singularity δ (dále jen vlastní číslo δ) bylo testováno na uvedených materiálových konfiguracích pro různý úhel trhliny (vůči rozhraní) v rozmezí 0° až 180° . Průběh δ_l na úhlu trhliny α je zobrazen na obrázku 18. Vidíme, že závislosti jsou symetrické. Největších hodnot je dosaženo na rozhraní, kde vlastní číslo konverguje k $\delta_l = 0,5$. Ovšem v určitém okamžiku, kdy je dosaženo mezního úhlu α_m , výpočtový model selhává. Vlastní číslo se stává komplexní.

Obr. 18: Závislost vlastního čísla δ_1 na sklonu trhliny α

Dále vidíme, že se zvyšující se tuhostí materiálu 2, v podélném směru E_L , maximální hodnota vlastního čísla δ_1 a mezní hodnota úhlu α_m roste. Např. pro materiálovou konfiguraci, kde hodnota $E_L = 400$ MPa je $\delta_1 = 0,462$ a $\alpha_m = 20^\circ$, zatímco pro konfiguraci $E_L = 100$ MPa (materiálu 2) je $\delta_1 = 0,449$ a $\alpha_m = 5^\circ$ (pro úhel trhliny $\alpha = 90^\circ$).

Obr. 19: Závislost vlastního čísla δ_2 na sklonu trhliny α

Na obrázku 19 jsou zobrazeny průběhy smykového vlastního čísla δ_2 . Zde dosahujeme maximálních hodnot pro úhel $\alpha = 90^\circ$, tzn. pro trhlinu kolmou na rozhraní. Jakmile se blížíme k rozhraní, vlastní číslo δ_2 klesá a konverguje opět k hodnotě $\delta_2 = 0,5$. Stále zde platí závislost, že při zvyšování tuhosti materiálu 2 se křivka posouvá vertikálně vzhůru. Pro tužší konfiguraci získáváme vyšší vlastní číslo δ_2 v případě trhliny kolmé k rozhraní.

Jak již bylo uvedeno v kapitole 6, kromě charakteristických čísel δ nám program *Maple* vypisuje vlastní vektory \mathbf{v}_i , počítané ve vztahu (37). V každé oblasti soustavy jsou odlišné. Pro názornost jsou \mathbf{v}_i vypsány v tabulce 3 pro dané úhly 45° , 90° a 135° , první materiálové konfigurace.

$\alpha [^\circ]$	Číslo δ_1	$v_1^I [-]$	$v_1^{II} [-]$	$v_1^{III} [-]$
	Číslo δ_2	$v_2^I [-]$	$v_2^{II} [-]$	$v_2^{III} [-]$
45	0,475	$-0,36433 + 0,93108i$	$-0,36433 + 0,72511i$	$-0,42286 + 0,72048i$
		$-0,00685 + 0,01750i$	$-0,00685 + 0,01740i$	$-0,09794 + 0,16687i$
	0,592	$-0,22155 + 0,44192i$	$-0,22155 + 0,29611i$	$0,02496 + 0,22306i$
		$-0,38958 + 0,07771i$	$-0,38958 + 2,34434i$	$0,24140 + 2,15737i$
90	0,462	$-0,66196 + 0,74565i$	$-0,66196 + 0,58767i$	$-0,81883 + 0,56895i$
		$0,05059 - 0,05698i$	$0,05058 + 0,05698i$	$-0,06257 + 0,04347i$
	0,665	$-0,10388 + 0,06006i$	$-0,10388 - 0,06006i$	$0,00022 - 0,11999i$
		$-0,85945 + 0,49693i$	$-0,85945 + 1,48643i$	$-0,00189 + 0,99277i$
135	0,475	$-0,87643 + 0,42537i$	$-0,87643 + 0,35691i$	$-1,11588 + 0,33798i$
		$0,20299 - 0,09852i$	$0,20299 + 0,00803i$	$0,02097 - 0,00635i$
	0,592	$0,10124 - 0,01807i$	$0,10124 - 0,13588i$	$0,16530 - 0,15486i$
		$-0,97921 + 0,17479i$	$-0,97921 + 0,47634i$	$-0,29067 + 0,27231i$

Tab. 3: Vlastní vektory konfigurace $E_L = 400 \text{ GPa}$, $E_T = 50 \text{ GPa}$.

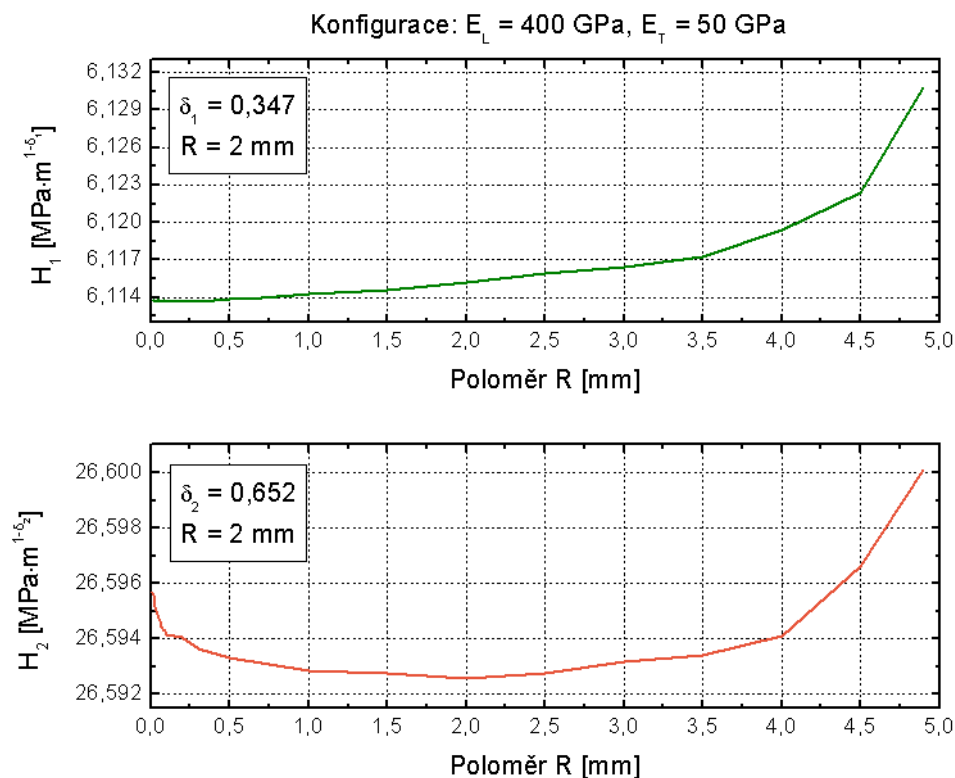
7.2. Výpočet zobecněného faktoru intenzity napětí

Zobecněný faktor intenzity napětí H_k (dále jen faktoru H_k) byl stanoven pomocí popsané teorie ψ -integrálu, s použitím uvedených softwarových programů. Číselné hodnoty zkoumaných konfigurací jsou vypsány v tabulce 4.

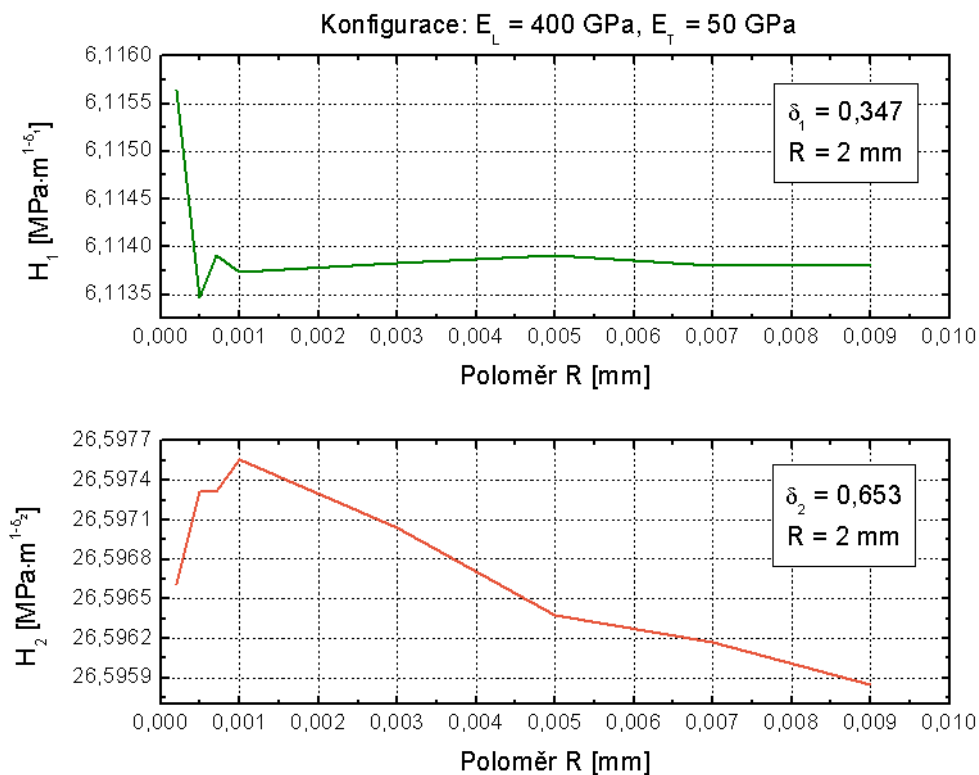
Dále byl zkoumán vliv faktoru H_k na poloměru integrační cesty R , v rozmezí $2 \mu\text{m}$ až 5 mm . Na Obrázku 20 je zobrazen průběh pro první materiálovou konfiguraci. Vidíme, že závislost H_1 roste s rostoucím poloměrem. U průběhu H_2 pozorujeme z počátku klesavou tendenci. Rozptyl hodnot, na uvedeném rozsahu, je $\Delta H_1 = 0,017 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1-\delta_1}$ a $\Delta H_2 = 0,008 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1-\delta_2}$. Velikosti těchto veličin ΔH_1 a ΔH_2 je přisuzováno numerickým nepřesnostem analytického výpočtu. Použitím vhodnější metody integrace ψ -integrálu v programu *Matlab*, bychom měli dosáhnout přesnějších výsledků. Přesto uvedené výsledky jsou uspokojivé.

Grafické průběhy na obrázku 21 ukazují závislost faktoru H_k na poloměru v těsné blízkosti kořene trhliny. Faktor H_1 do $7 \mu\text{m}$ vykazuje určitou oscilaci. To je způsobeno numerickou nepřesností metody konečných prvků z hlediska singularity. Z toho důvodu je nutné volit integrační cestu dále od kořene trhliny. Jak již bylo uvedeno, použitá teorie ψ -integrálu to umožňuje. Popisujeme tak skutečné pole napětí a posuvů, které není ovlivněno singulárním chováním koncentrátoru. Z uvedených průběhů doporučujeme volit poloměr integrační cesty R v rozmezí $0,5$ až 4 mm . Při dalších analýzách byl zvolen poloměr $R = 2 \text{ mm}$.

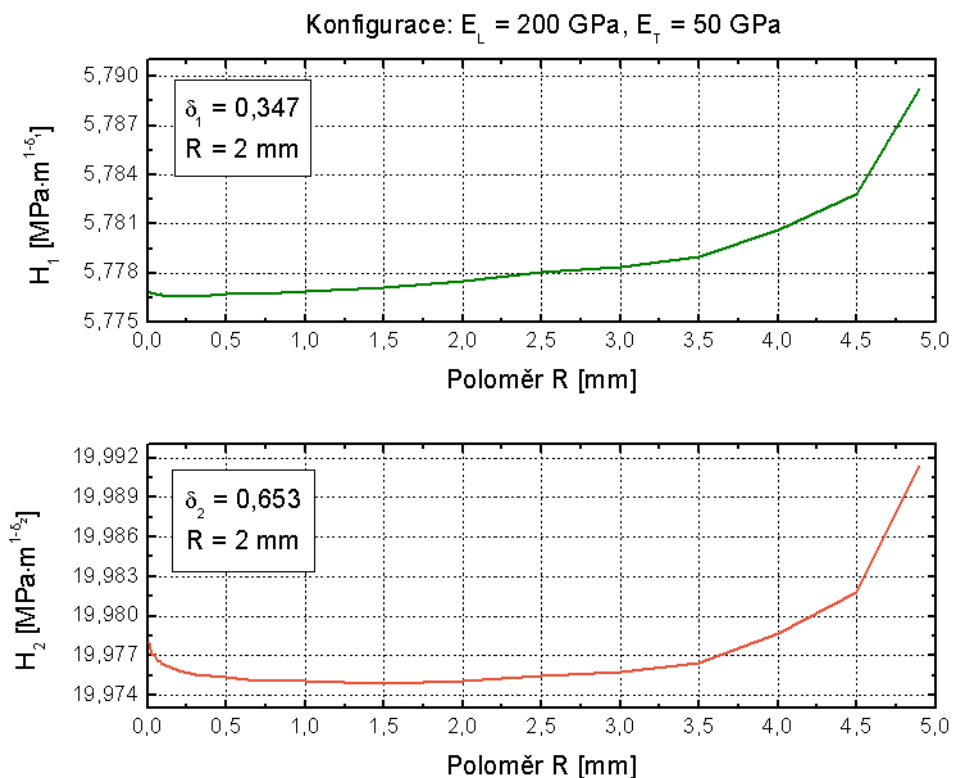
Na obrázku 22 a 23 jsou uvedeny průběhy pro druhou materiálovou konfiguraci. Charakter křivek je stejný jako v prvním případě. Opět zde vidíme oscilaci faktoru H_1 v těsné blízkosti kořene trhliny, ovšem k ustálení dochází na větším poloměru. Rozptyl hodnot je zde $\Delta H_1 = 0,013 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1-\delta_1}$ a $\Delta H_2 = 0,016 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1-\delta_2}$.



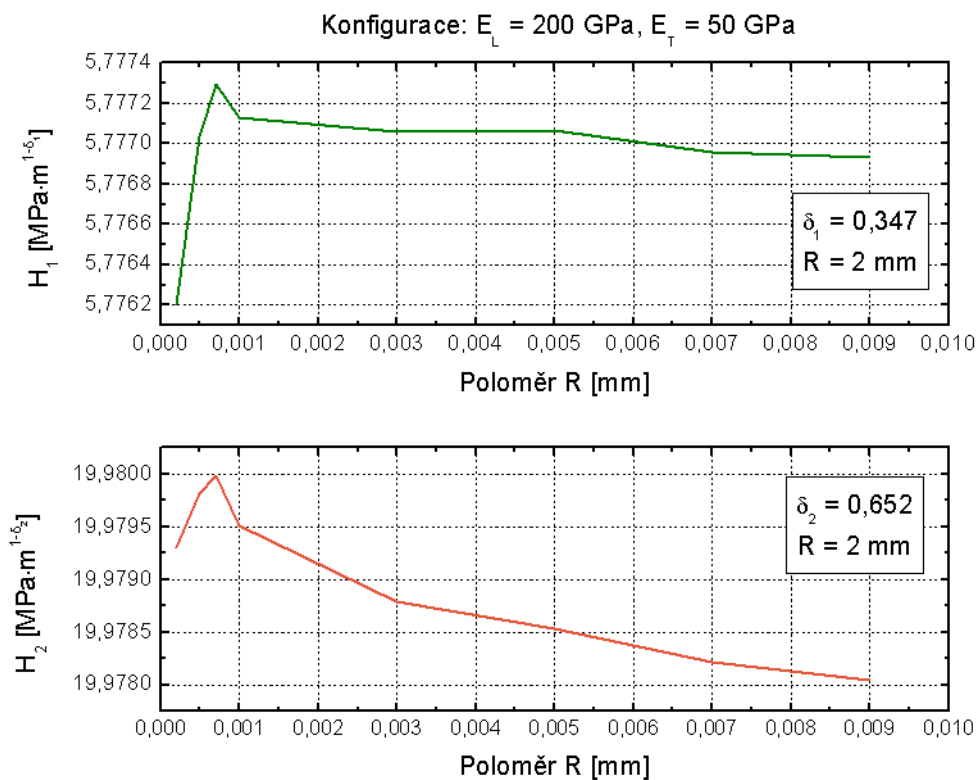
Obr. 20: Závislost poloměru integrační cesty na faktoru intenzity napětí první materiálové konfigurace



Obr. 21: Závislost poloměru integrační cesty na faktoru intenzity napětí v těsné blízkosti koncentrátoru první materiálové konfigurace.

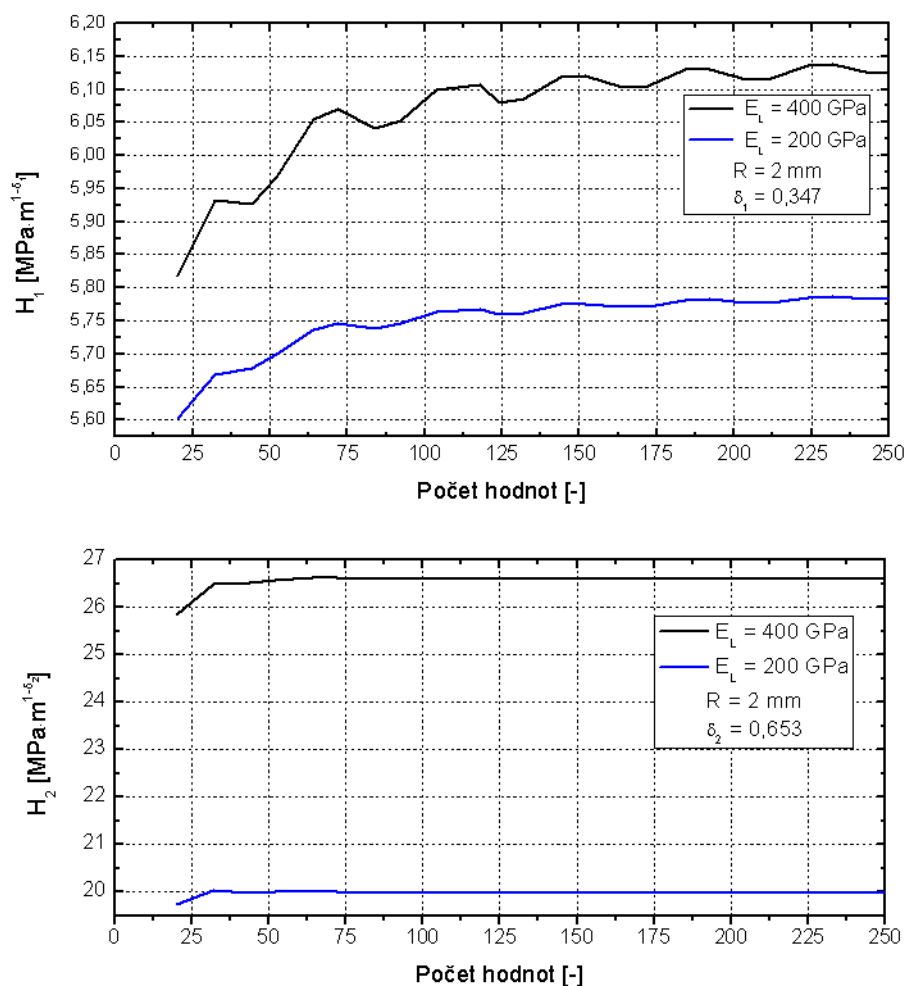


Obr. 22: Závislost poloměru integrační cesty na faktoru intenzity napětí druhé materiálové konfigurace

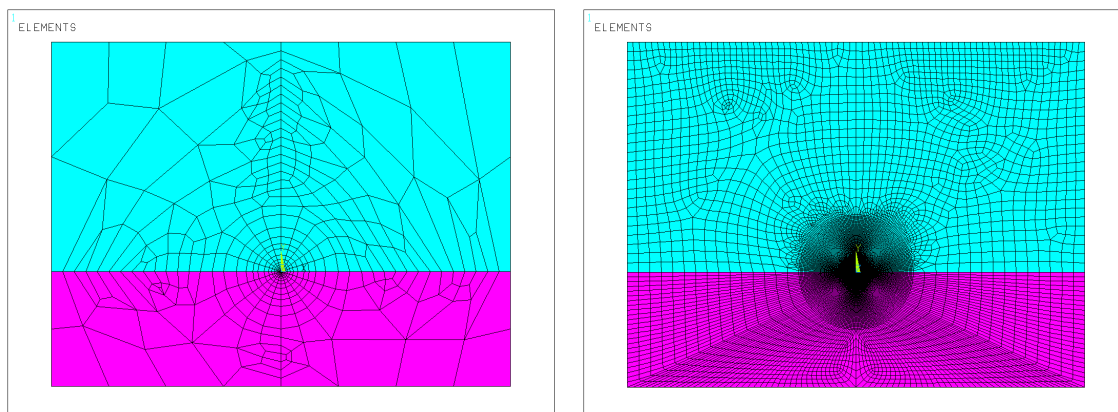


Obr. 23: Závislost poloměru integrační cesty na faktoru intenzity napětí v těsné blízkosti koncentrátoru druhé materiálové konfigurace.

Dále byla u faktoru H_k zkoumána závislost na hustotě sítě. Jak již bylo uvedeno v kapitole 6, jedním ze vstupujících parametrů pro numerické řešení byla hodnota *počet_hodnot*. Při vytváření sítě konečných prvků v programu *Ansys*, rozdělujeme integrační cestu R na příslušný počet elementů, ve kterých následně analyzujeme pole napětí a posuvů. Na obrázku 24 jsou uvedeny průběhy závislosti faktoru H_k na zmiňovaném počtu elementů, tzn. na hodnotě parametru *počet_hodnot*. Závislost byla zkoumána na rozsahu 20 až 250 elementů pro poloměr integrační cesty $R = 2$ mm. Z průběhu H_1 lze vypočítat výraznou oscilaci, přičemž amplituda kmitání, se s rostoucím počtem elementů snižuje. V určitém okamžiku bychom měli dosáhnout nezávislosti na hustotě sítě. Dále je patrné, že s rostoucí tuhostí materiálu je amplituda výraznější. Střední hodnota kmitavého průběhu je logaritmického charakteru. Při snižování počtu elementů teoreticky konverguje k nule. Smykový faktor H_2 je zcela nezávislý na hustotě sítě. Dále bylo analýzou zjištěno, že průběhy jsou nezávislé na poloměru integrační cesty R . Tvar sítě při maximálním a minimálním počtu prvků je ukázán na obrázku 25.



Obr. 24: Závislost hustoty sítě konečných prvků numerického modelu na faktoru intenzity napětí.

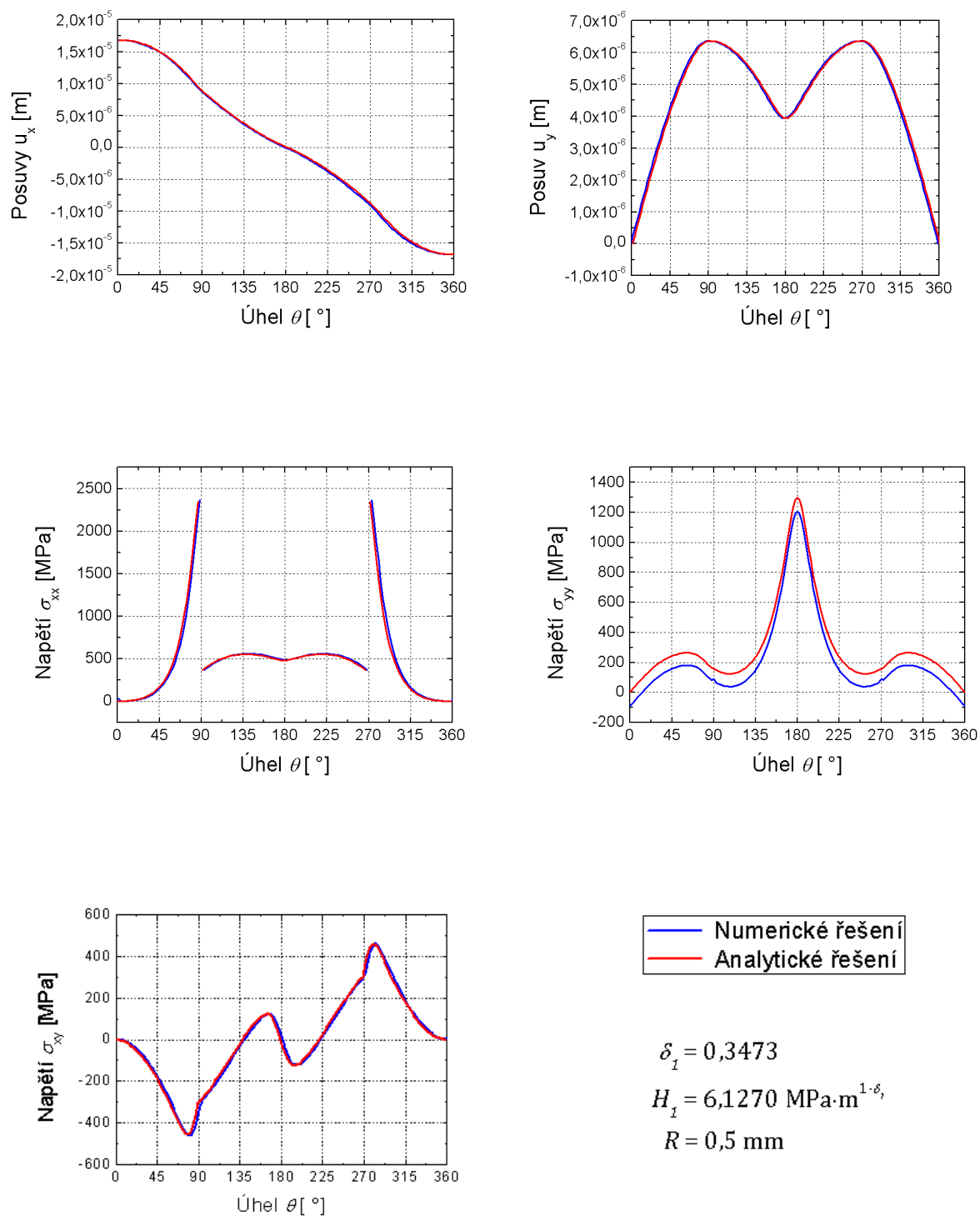


Obr. 25: Síť konečných prvků s: Vlevo – 20 elementy na integrační cestě R ;
Vpravo – 250 elementy na integrační cestě R ;

7.3. Deformační a napět'ové pole v okolí čela trhliny

Na základě znalosti exponentu singularity p_k a zobecněného faktoru intenzity napětí H_k (dále jen faktoru H_k), lze stanovit průběhy posuvů a napětí v okolí čela trhliny. Součástí výpočtového programu je porovnání analytických výsledků s výsledky numerickými. Na následujícím obrázku 20 jsou vykresleny průběhy pro tahové zatížení první materiálové konfigurace na poloměru $R = 1$ mm. Na obrázku 21 pak průběhy pro smykové zatížení. Vidíme, že křivky, až na posuv u_y a napětí σ_{yy} , se téměř shodují. Tato nepřesnost je způsobena určitým členem Williamsova rozvoje, tzv. T-napětím. Může nabývat kladných hodnot (tahové T-napětí) nebo záporných hodnot (tlakové T-napětí). Je závislé na okrajových podmínkách a jeho velikost se mění se zatížením a geometrií. Pomocí T-napětí je možné charakterizovat constrain (stísnění) před čelem trhliny. V [13] byl zkoumán vliv T-napětí na uvedených nepřesnostech.

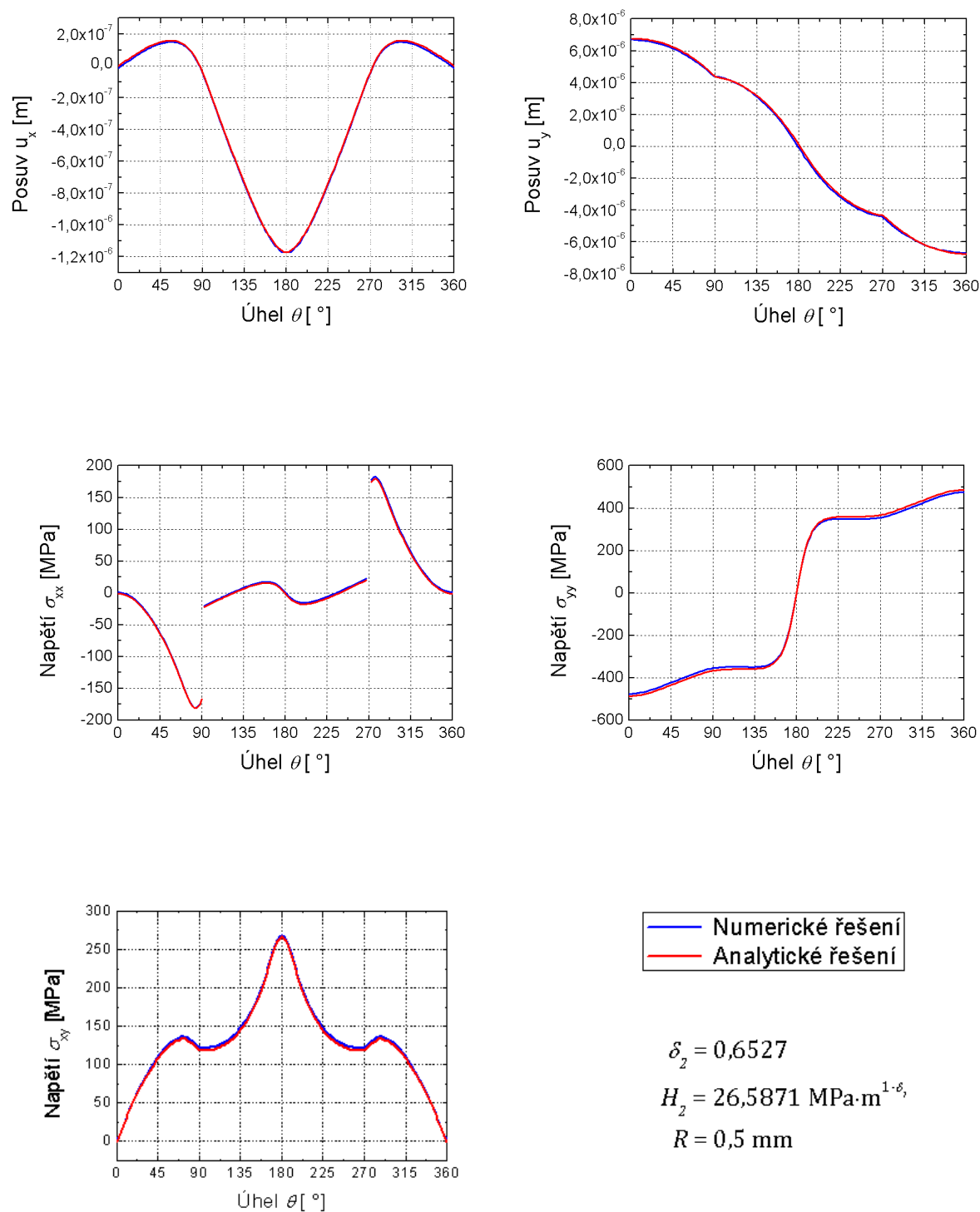
Jak již bylo uvedeno, z průběhů posuvů jsme schopni stanovit, o jaké namáhání se jedná. Máme-li tahové zatížení, trhlina je rozevírána, tzn. posuvy v ose x na lomových plochách jsou nesouhlasné a tvar křivky je antisymetrický. Naopak posuvy v ose y jsou souhlasné a tvar je symetrický. Pro smykové zatížení je tomu přesně naopak (viz Obr. 20, 21). Dále je důležité, aby průběhy byly spojitě z důvodu soudržnosti celé soustavy a podmínek definovaných při výpočtech. Při pohledu na průběhy napětí zjistíme, že i zde je symetrie. Ovšem u průběhu σ_{xx} dochází k nespojitosti na rozhraní, které je způsobeno rozdílnými napět'ovými vlastnostmi materiálů. Dále je nezbytné, aby napětí σ_{xx} a σ_{yy} byly na lomových plochách nulové. V porovnání s ostatními materiály jsou průběhy, až na průběhy σ_{xx} podobného charakteru. Liší se pouze v hodnotách nebo hladkostí průběhu. Všechny uvedené závislosti jsou vykresleny pro 150 elementů na integrační cestě R .



Obr. 26: Porovnávání analytických a numerických průběhů napětí a posuvů.

Materiál 1: $E_L = 400 \text{ GPa}$; $E_T = 50 \text{ GPa}$; $\varphi = 0^\circ$;

Materiál 2: $E_L = 400 \text{ GPa}$; $E_T = 50 \text{ GPa}$; $\varphi = 90^\circ$;



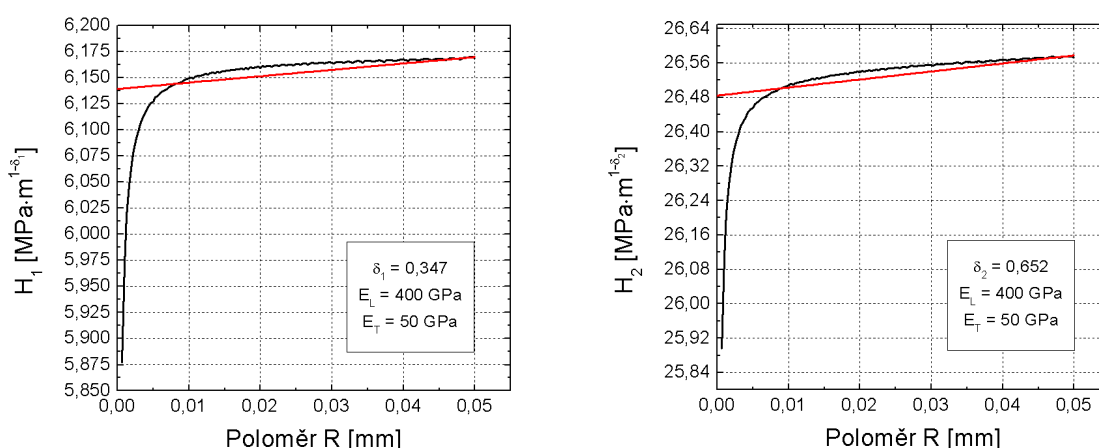
Obr. 27: Porovnávání analytických a numerických průběhů napětí a posuvů.

Materiál 1: $E_L = 400 \text{ GPa}$; $E_T = 50 \text{ GPa}$; $\varphi = 0^\circ$;

Materiál 2: $E_L = 400 \text{ GPa}$; $E_T = 50 \text{ GPa}$; $\varphi = 90^\circ$;

7.4. Numerické vyhodnocení

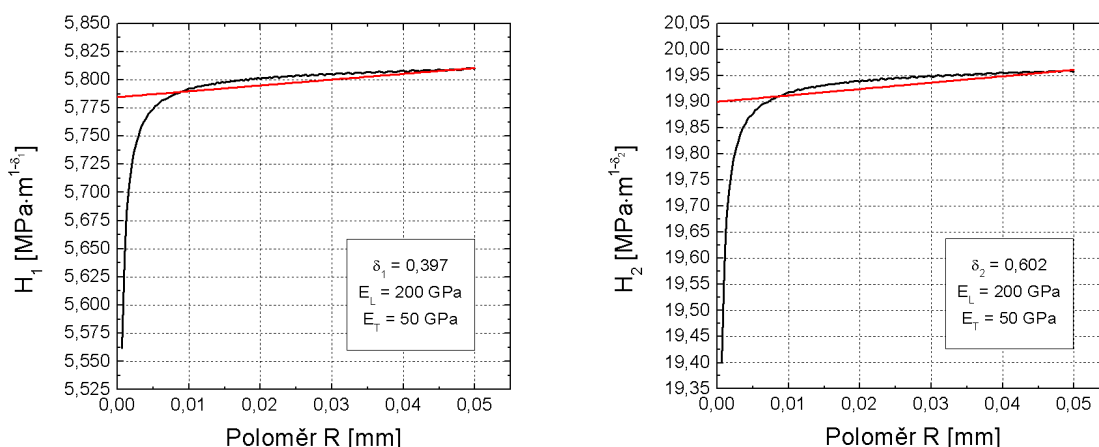
Na následujících obrázcích jsou faktory intenzity napětí H_k získávány pomocí tzv. přímé metody extrapolace. Vycházíme z rovnice (57), kdy pracujeme s hodnotami napětí σ_{xx} , pro úhel $\theta = 180^\circ$ od lomové plochy trhliny, tzn. ve směru její osy. Napětí je odečítáno z numerického modelu, na poloměru v rozmezí 0,1 až 50 μm . Následně, na základě vlastností přímé metody, jsou na obrázcích 28 a 29 vykresleny závislosti tahového (vlevo) a smykového (vpravo) faktoru H_k . Vidíme, že od určité vzdálenosti od kořene trhliny jsou průběhy téměř lineární. Aplikací odpovídající extrapolace pro poloměr $R = 0$ stanovíme hodnoty H_1^* a H_2^* .



Obr. 28: Extrapolace faktorů H_1^* a H_2^* první materiálové konfigurace:

Materiál 1: $E_L = 400 \text{ GPa}$; $E_T = 50 \text{ GPa}$; $\varphi = 0^\circ$;

Materiál 2: $E_L = 400 \text{ GPa}$; $E_T = 50 \text{ GPa}$; $\varphi = 90^\circ$;



Obr. 29: Extrapolace faktorů H_1^* a H_2^* druhé materiálové konfigurace:

Materiál 1: $E_L = 200 \text{ GPa}$; $E_T = 50 \text{ GPa}$; $\varphi = 0^\circ$;

Materiál 2: $E_L = 200 \text{ GPa}$; $E_T = 50 \text{ GPa}$; $\varphi = 90^\circ$;

V následující tabulce 4 jsou porovnávány hodnoty faktorů intenzity napětí, získaných z výše uvedených metod. Jak můžeme vidět, k rozdílům dochází na prvním nebo druhém desetinném místě. Pokud bychom chtěli dosáhnout přesnějšího porovnání, je nutné volit vhodnější extrapolaci přímé metody, což vyžaduje určité zkušenosti. Volba rozsahu poloměru R při extrapolaci ovlivní sklon přímky, a tedy hodnotu faktoru H_k . Přesto poskytuje věrohodné výsledky.

Z vypočtených hodnot je dále patrné, že při zvyšování tuhosti materiálu v podélném směru, hodnoty faktorů H_k rostou. Dále v porovnání s módy zatěžování se H_k , oproti vlastním číslům d_i , výrazně liší. U tahového módu, který je považován za nejnebezpečnější, se hodnoty H_k pohybují řádově v jednotkách, zatímco u smykového módu řádově v desítkách.

Konfi- gurace	δ_1 [-]	H_1 [MPa·m ^{1-δ_1}]	H_1^* [MPa·m ^{1-δ_1}]	δ_2 [-]	H_2 [MPa·m ^{1-δ_2}]	H_2^* [MPa·m ^{1-δ_2}]	R [mm]
Případ 1	0,347	6,121	6,139	0,652	26,589	26,484	2
Případ 2	0,397	5,776	5,785	0,603	19,972	19,899	2

Pozn. Jednotlivé materiálové charakteristiky uvedených případů konfigurace jsou vypsány v tabulce 2, v úvodu této kapitoly.

Tab. 4: Porovnání numerických výsledků zobecněného faktoru intenzity napětí.

8. Závěr

Cílem práce byla aplikace psí-integrálu k určení zobecněného faktoru intenzity napětí pro trhlínu v blízkosti bimateriálového rozhraní. Po nastudování potřebné literatury, byl v úvodu proveden rozbor pomocí systému podstatných veličin, který vytváří představu o dané problematice a upozorňuje na skutečnosti, které při řešení nelze zanedbat. Následně byla věnována kapitola základním pojmům lomové mechaniky, zmiňující např. Griffithovu teorii, základní zatěžovací módy nebo vznik plastické oblasti před čelem koncentrátoru. Vzhledem k tomu, že jsme se zabývali ortotropními materiály, je v práci zařazena kapitola popisující kompozitní materiály. V této části byla uvedena základní směšovací pravidla, pomocí nichž jsou počítány mechanické charakteristiky kompozitů.

Kromě určování zobecněného faktoru intenzity napětí je součástí práce výpočet exponentu singularity, resp. vlastního čísla exponentu singularity, pro případ trhliny nakloněné pod libovolným úhlem vzhledem k bimateriálovému rozhraní. Na tuto problematiku byl aplikován tzv. *LES formalismu*, který využívá vlastností komplexní proměnné v oblasti rovinné anizotropní pružnosti. Po odvození potřebné charakteristické rovnice pro řešení vlastního čísla, následoval popis teorie zaměřující se na psí-integrál, který je důsledkem platnosti Bettiho recipročního teorému. Výhodou této metody je nezávislost na integrační cestě okolo kořene trhliny při výpočtech hledaného faktoru. Můžeme tak počítat hodnotu psi-integrálu v oblastech, ve kterých se neprojevuje vliv singularity způsobený našim koncentrátorem napětí.

Zbývající část práce je zaměřena na numerické výpočty uvedených konkrétních konfigurací s použitím výpočtových softwarů jako je *Ansys*, *Matlab* nebo *Maple*. Jsou zde např. vyhodnoceny průběhy vlastních čísel exponentů singularity nebo analyzovány závislosti hustoty konečno-prvkové sítě numerického modelu na faktoru intenzity napětí. Nechybí zde ani vykreslení a porovnání průběhů napětí a posuvů okolo kořene trhliny pro jednotlivé módy zatěžování. Také je zde ověřována nezávislost psí-integrálu na poloměru integrační cesty. V závěru práce jsou porovnány hodnoty faktorů intenzity napětí, získané psí-integrálem, s hodnotami stanovenými tzv. přímou metodou.

9. Literatura

- [1] BROBERG, K. B. *Crack and fracture*. Academic Press, 1999, London. 753 s ISBN 0-12-134130-5
- [2] FLORIAN, Z. *Mezní stavy a spolehlivost*. (přednáška) Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, 19.9.2011.
- [3] HWU, C. *Anisotropic elastic plates*. New York: Springer, 2010. 673 s. ISBN 978-1-4419-5914-0.
- [4] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. Třetí přepracované. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [5] JANÍČEK, P. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: Hledání souvislostí*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2007. ISBN 978-80-7204-554-9.
- [6] KLUSÁK, Jan; KNĚSL, Zdenek; NÁHLÍK, Luboš. *Crack initiation criteria for singular stress concentrations : Part II: Stability of Sharp and Bi-Material Notches*. Engineering mechanics, 2007, roč. 14, č. 6, s. 409-422. ISSN 1802-1484.
- [7] KLUSÁK, J., PROFANT, T. A KOTOUL, M. *Various method of numerical estimation of generalized stress intensity factor of bi-material notches*. Applied and Computational Mechanics, Vol 3, No 2 (2009). ISSN 1802-1484.
- [8] ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., JANÍČEK, P., BURŠA, J. *Mechanika těles pružnost a pevnost II*. 4 Přepracované vyd. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, 2006. 262 s., ISBN 80-214-3260-8
- [9] PAPADAKIS, P., BABUŠKA, I. *A numerical procedure for determination of certain quantities related to the stress intensity factors in two-dimensional elasticity. Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1995. Volume 122. Stránky 69–92.
- [10] PROFANT, T. *Interakce mikrotrhlin s částicemi druhé fáze*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2004. 32 s., ISBN: 80-214-2549-0.
- [11] SVOBODA, M. *Problém trhliny v blízkosti bimateriálového rozhraní*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 25 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [12] ŠEVEČEK, O., PROFANT, T., KOTOUL, M. *Stress field analysis near the semiinfinite crack tip terminating perpendicular to the interface between two orthotropic materials*. Engineering MECHANICS, nezařazené články. První vyd. Svatka: Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2006. s. 304 – 305. ISBN: 80-86246-27-2

- [13] ŠEVEČEK, O. *Solution of general stress concentrators in anisotropic media by combination of FEM and the complex potential theory*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 123 s. Vedoucí disertační práce prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.
- [14] VRBKA, J. *Mechanika kompozitu*. (prednáška) Brno: Ústav mechaniky teles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, 22.9.2011.

10. Seznam zkratek a symbolů

a	Délka trhliny
E_i	Youngův modul pružnosti
F_{ij}	Tvarová funkce pro jednotlivé zatěžovací módy (I, II, III)
G	Hnací síla trhliny
G_{ij}	Modul ve smyku
H_k	Zobecněný faktor intenzity napětí
K_I	Faktor intenzity napětí pro těleso namáhané módem I
p_k	Exponent singularity
R	Odpor tělesa proti růstu trhliny
r, θ	Polární souřadnice
\mathbf{S}	Matice poddajnosti
S_{ij}	Prvky matice poddajnosti
u_i	Složky vektoru posuvu
\mathbf{v}_i	Vlastní vektory charakteristické rovnice
W_e	Energie napjatosti
W_p	Energie potřebná pro zvětšení délky trhliny
W_z	Energie vnějšího zatížení (vnějších sil)
δ_i	Charakteristické číslo exponentu singularity
φ	Natočení vláken materiálu vzhledem ke kladné ose x
ν_{ij}	Poissonovo číslo
π	Ludolfovo číslo
σ_{cL}	Podélné napětí kompozitního materiálu
σ_{ij}	Složky tenzoru napětí
$\sigma_{\theta\theta}$	Tangenciální napětí
LES	Lechnicky – Eshelby – Strohův formalismus

11. Dodatky

A1 Komplexní potenciály

K popisu rovinné isotropní napjatosti, příp. deformace, lze použít popis pomocí dvou komplexních potenciálů. Vztah pro posuvy lze vyjádřit ve tvaru [Papchovich, Neuber]

$$2\mu \mathbf{u} = 4(1-\nu)\Psi - \text{grad}(\varphi + \mathbf{r} \cdot \Psi), \quad (\#1)$$

kde \mathbf{u} je vektor posunutí, \mathbf{r} je polohový vektor, μ je modul pružnosti ve smyku a ν je Poissonovo číslo. Operátor $(.)$ značí skalární součin. Skalár φ a vektorový potenciál Ψ jsou harmonické funkce (tzn. splňují Laplaceovy rovnice; viz dodatek B), které lze vyjádřit pomocí analytických funkcí $f(z)$ a $g(z)$ následovně

$$\psi_x = \text{Re } f(z), \quad \psi_y = \text{Im } f(z), \quad \varphi = \text{Re } g(z). \quad (\#2)$$

Právě vztah mezi ψ_x a ψ_y vyjadřuje skutečnost, že je zapotřebí pouze dvou komplexních potenciálů k popisu rovinné napjatosti (příp. deformace) v případě izotropní pružnosti. Dosazením vztahu (#2) do výchozí rovnice (#1) a po následné aplikaci Hookova zákona získáme vztahy pro složky napětí

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \cdot \text{Re}[f'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}f''(z) + g''(z)] \end{aligned} \quad (\#3)$$

kde i je imaginární jednotka. Pro posuvy platí vztah

$$2\mu(u + iv) = \frac{1+k^2}{1-k^2} f(z) - z\overline{f'(z)} - \overline{g'(z)}, \quad (\#4)$$

kde

$$k^2 = \begin{cases} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \text{pro rovinnou defomaci,} \\ \frac{1-\nu}{2} & \text{pro rovinnou napjatost.} \end{cases} \quad (\#5)$$

Pokud dosadíme okrajové podmínky konkrétního případu úlohy (viz A2) do vztahů (#3), získáme výrazy pro výslednou sílu $X + iY$ podél křivky s

$$f(z) + z\overline{f'(z)} + \overline{g'(z)} = i \int_0^s (X + iY) ds \quad (\#6)$$

A2 Okrajové podmínky

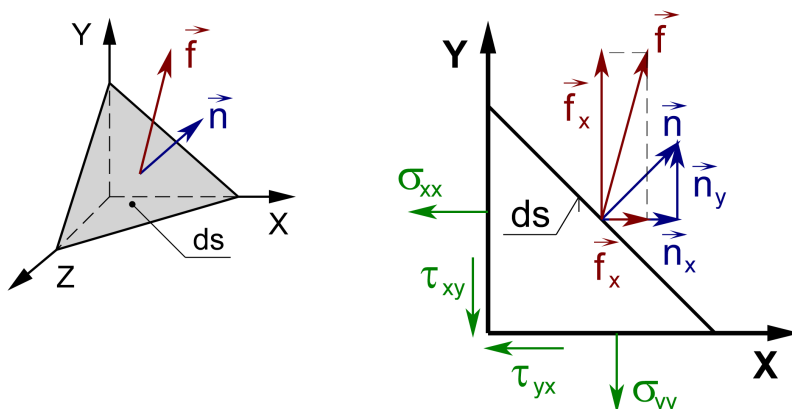
Abychom zajistili platnost uvedených rovnic v předchozím dodatku pro konkrétní případ, je nutné stanovit okrajové podmínky. Vyjádříme je pomocí tzv. vektoru výsledné síly $\int (f_x + if_y) \equiv \int (X + iY)$. Vycházíme ze statické rovnováhy elementárního prvku tělesa, ve tvaru čtyřstěnu (viz Obr. #1), který je definován jednotkovým vektorem n_i . Na jeho vnějším povrchu působí obecné napětí f_i , přičemž z podmínek rovnováhy vyplývá

$$\begin{aligned} f_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \\ f_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y, \end{aligned} \quad (\#7)$$

kde pro jednotkový vektor platí $n_x = dy/ds$ a $n_y = dx/ds$. Proto složky vektoru výsledné síly, uvedené ve vztahu (#7), vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} f_x ds &= \sigma_x dy - \tau_{xy} dx, \\ f_y ds &= \tau_{xy} dy - \sigma_y dx, \end{aligned} \quad (\#8)$$

který lze následně integrovat podél obecné křivky s , viz (#6)[1].



Obr. #1: Statická rovnováha elementárního prvku tělesa.

Dodatek B

Základní komplexní funkce v souřadnicích x a y je vyjádřena vztahem

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (\#9)$$

kde ϕ a ψ jsou reálné funkce. $F(z)$ má řešení v každém bodě komplexní roviny $z = x + iy$. V případě přírůstku $dz = dx + idy$ je diferenciál $dF(z)$ lze vyjádřit jako

$$dF = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) idy, \quad (\#10)$$

nebo-li

$$dF = F'(z)dz, \quad \text{kde} \quad F'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{nebo} \quad F'(z) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (\#11)$$

Ve vztahu (#11) byly použity tzv. Cauchy Riemannovy podmínky

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\#12)$$

které jsou nutnou a postačující podmínkou diferencovanosti komplexních funkcí. Z těchto podmínek taktéž plyne, že reálná a imaginární část funkce komplexní proměnné jsou tzv. harmonické funkce, tj. vyhovují rovnici

$$\Delta \phi = 0, \quad \Delta \psi = 0 \quad (\#13)$$